Respect, Professionalism, & Entrepreneurship

Mata Kuliah : Mekanika Bahan
Kode : TSP – 205
SKS : 3 SKS

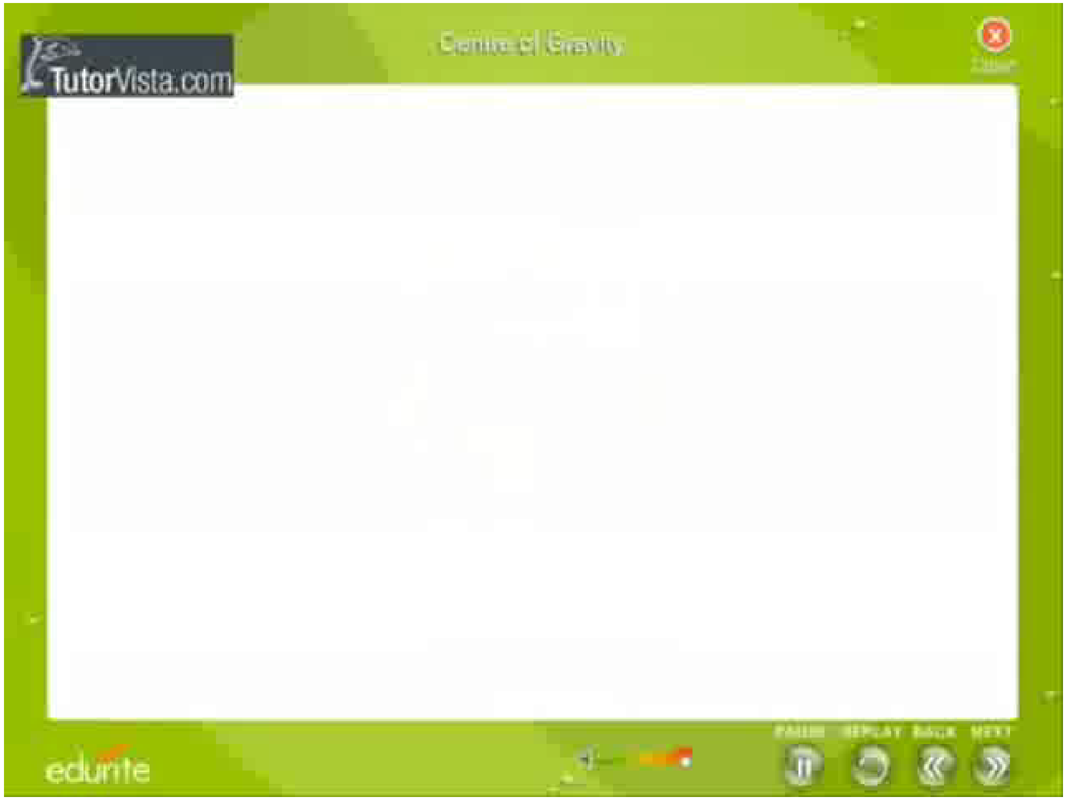
Analisis Penampang

Pertemuan – 4, 5, 6

- TIU :
  - Mahasiswa dapat menghitung properti dasar penampang, seperti luas, momen statis, momen inersia
- TIK :
  - Mahasiswa mampu menentukan pusat berat dan momen inersia suatu penampang

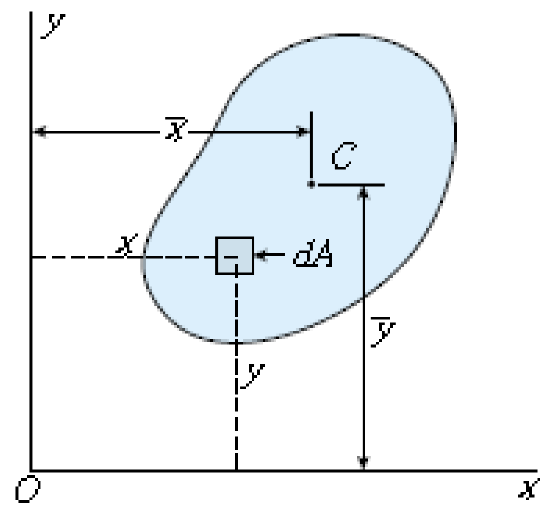
- Sub Pokok Bahasan :
  - ✓ Pusat Berat
  - ✓ Momen Inersia
  - ✓ Teorema Sumbu Sejajar
  - ✓ Momen Inersia Polar
  - ✓ Produk Inersia
  - ✓ Rotasi Sumbu
  - ✓ Sumbu Utama dan Momen Inersia Utama

Pusat Berat (Center of Gravity)



Pusat Berat (Center of Gravity)

- Letak pusat berat (CoG) merupakan besaran dasar yang penting, yang merupakan titik tolak untuk menentukan besaran penampang yang lainnya
- Suatu benda sembarang berada dalam koordinat *xy*, memiliki pusat berat di titik C, maka luas dari bidang tersebut dapat didefinisikan menggunakan integral sebagai berikut :



$$A = \int dA$$

dA adalah elemen diferensial dari area yang mempunyai koordinat x dan y

Pusat Berat (Center of Gravity)

- Momen pertama (**statis momen**) dari area tersebut terhadap sumbu *x* dan *y* masing-masing didefinisikan sebagai berikut :

$$Q_x = \int y \cdot dA \qquad Q_y = \int x \cdot dA$$

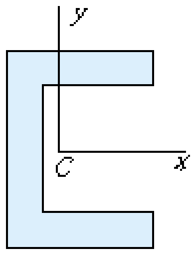
- Momen pertama menunjukkan **jumlah dari hasil kali setiap area diferensial dan koordinatnya**
- Momen pertama **dapat bertanda positif atau negatif**
- Momen pertama memiliki **satuan panjang pangkat tiga** (mm^3, m^3, in^3)

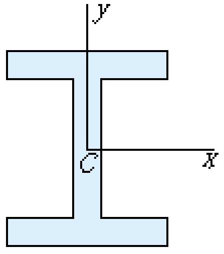
Pusat Berat (Center of Gravity)

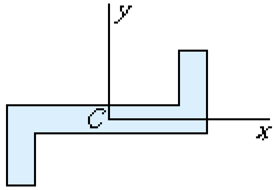
- Koordinat pusat berat C sama dengan momen pertama dibagi luas

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\int x \cdot dA}{\int dA} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int y \cdot dA}{\int dA}$$

- Untuk kasus khusus, letak CoG suatu penampang dapat ditentukan dengan mudah





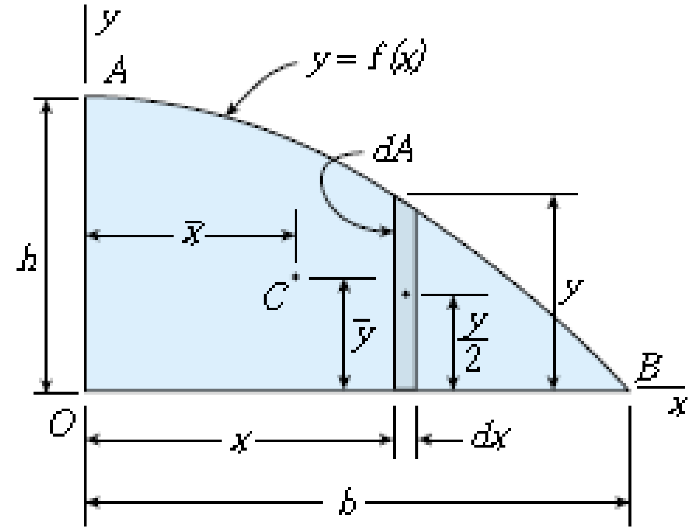


Pusat Berat (Center of Gravity)

Contoh 1

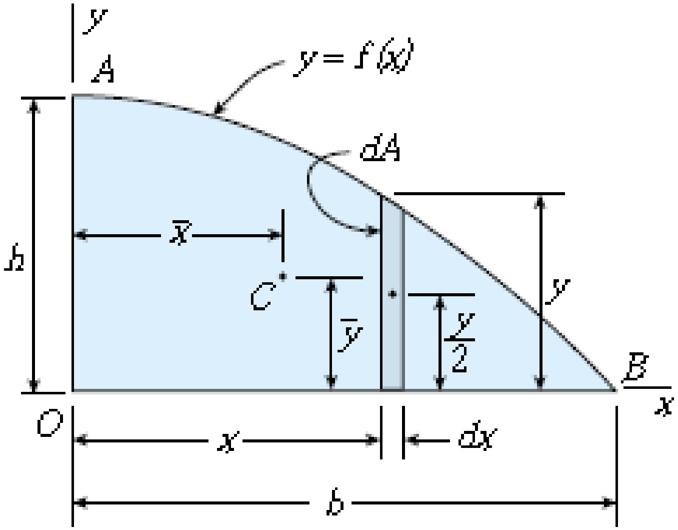
Sebuah semi segmen parabolik OAB dibatasi dengan sumbu *x*, sumbu *y* dan kurva parabolik yang mempunyai puncak di A. Persamaan kurva tersebut adalah :

$$y = f(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$$



Dengan *b* adalah alas dan *h* adalah tinggi semi segmen. Tentukan lokasi pusat berat C untuk semi segmen tersebut.

Jawab :



$$dA = ydx = h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx$$

$$A = \int dA = \int_0^b h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx = \frac{2bh}{3}$$

$$Q_x = \int \frac{y}{2}dA = \int_0^b \frac{h^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)^2 dx = \frac{4bh^2}{15}$$

$$Q_y = \int xdA = \int_0^b hx\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx = \frac{b^2h}{4}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{3b}{8}} \qquad \boxed{\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{2h}{5}}$$

$$y = f(x) = h\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)$$

Pusat Berat (Center of Gravity)

- Penampang-penampang standar yang umum dijumpai dalam dunia teknik (persegi panjang, lingkaran, segitiga dsb.) pada umumnya sudah ditabelkan lokasi pusat beratnya
- Yang sering dijumpai pula adalah adanya penampang yang merupakan gabungan dari beberapa bentuk penampang standar
- Untuk menghitung lokasi pusat berat penampang gabungan tersebut, maka penampang tersebut dapat dibagi-bagi menjadi beberapa komponen
- Misal diasumsikan bahwa area gabungan dibagi menjadi n bagian, dan luas bagian ke-i diberi notasi A_i

Pusat Berat (Center of Gravity)

- Selanjutnya dapat diperoleh luas dan momen pertama dengan penjumlahan sebagai berikut :

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad Q_x = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i \cdot A_i \qquad Q_y = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \cdot A_i$$

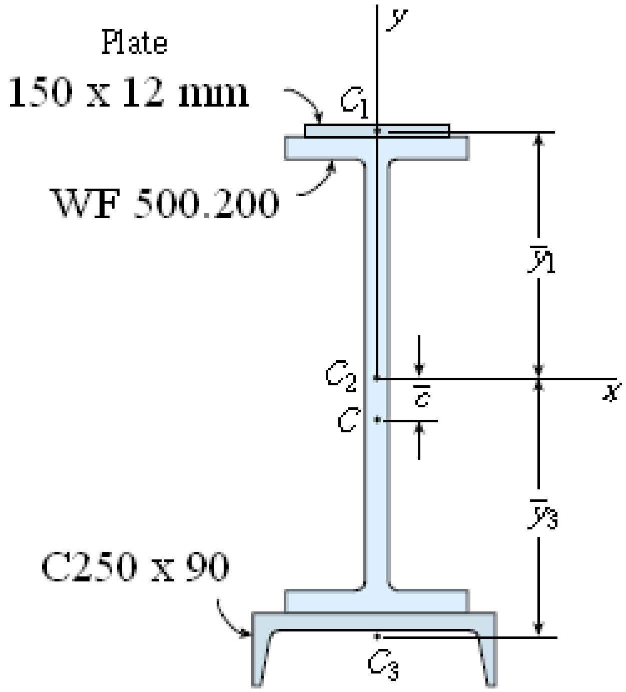
- Koordinat pusat berat penampang gabungan adalah :

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \qquad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

Pusat Berat (Center of Gravity)

Contoh 2

Sebuah penampang tersusun dari balok baja terbuat dari profil sayap lebar W 500.200 dengan pelat penutup 150 mm × 12 mm yang dilas di flens atas dan profil kanal C 250× 90. Tentukan lokasi pusat berat penampang diukur terhadap sumbu x dalam gambar.



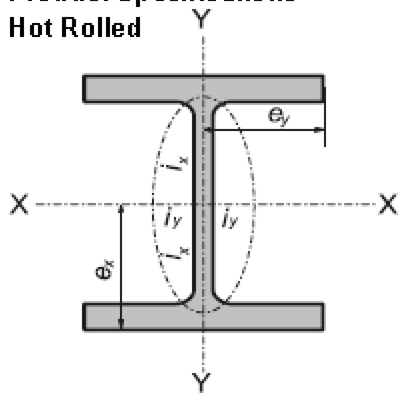
Universitas Pembangunan Jaya

Respect, Professionalism, & Entrepreneurship

Wide Flange Shape

Product Specifications

Hot Rolled

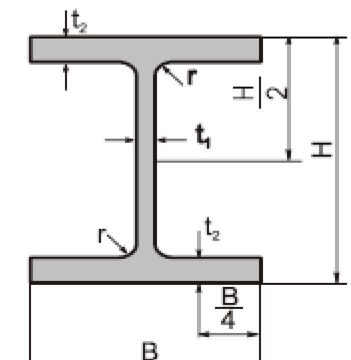


Geometrical moment of inertia $I = Ai^2$

Radius of gyration of area $I = \sqrt{I/A}$

Modulus of section $z = I/e$

(A = sectional area)



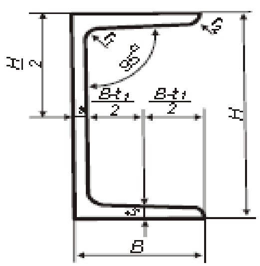
According JIS G 3192

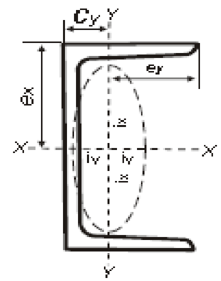
Metric Size

Standard Sectional Dimension					Section Area	Unit Weight	Informative Reference					
							Geometrical Moment Of Inertia		Radius Of Gyration Of Area		Modulus Of Section	
Nominal Dimensional mm	H x B mm	t1 mm	t2 mm	r mm	A cm^2	kg/m	Ix cm^4	Iy cm^4	ix cm	iy cm	Zx cm^3	Zy cm^3
100 x 100	100 x100	6	8	10	21.90	17.20	383	134	4.18	2.47	76.50	26.7
125 x125	125 x125	6.5	9	10	30.31	23.80	847	293	5.29	3.11	136.00	47.00
150 x 75	150 x75	5	7	8	17.85	14.00	666	50	6.11	1.66	8.88	13.20
150 x 100	150 x100	6	9	11	26.84	21.10	1,020	151	6.17	2.37	138.00	30.10
150 x 150	150 x150	7	10	11	40.14	31.50	1,640	563	6.39	3.75	219.00	75.10
500 x 200	500 x 200	10	16	20	114.2	89.60	47,800	2,140	20.50	4.33	1,910.00	214.00

UNP

Product Specifications
Hot Rolled





Metric Size

Standard Sectional Dimensions					Section Area	Unit Weight	Informative Reference						
							Center of Gravity	Geometrical Moment of Inertia		Radius of Gyration		Modulus of Section	
A	x	B	t_1	t_2	A	W	C_y	I_x	I_Y	i_x	i_Y	Z_x	Z_Y
mm	x	mm	mm	mm	cm^2	Kg/m	cm	cm^4	cm^4	cm	cm	cm^3	cm^3
75	x	40	5	7	8.818	6.92	1.27	75.9	12.4	2.93	1.19	20.2	4.54
100	x	50	5	7.5	11.92	9.36	1.55	189	26.9	3.98	1.5	37.8	7.82
125	x	65	6	8	17.11	13.4	1.94	425	65.5	4.99	1.96	68	14.4
150	x	75	6.5	10	23.71	18.6	2.31	864	122	6.04	2.27	115	23.6
150	x	75	9	12.5	30.59	24	2.31	1050	147	5.86	2.19	140	28.3
180	x	75	7	10.5	27.2	21.4	2.15	1380	137	7.13	2.24	150	25.5
200	x	70	7	10	26.92	21.1	1.85	1620	113	7.77	2.04	162	21.8
200	x	80	7.5	11	31.33	24.6	2.24	1950	177	7.89	2.38	195	30.8
200	x	90	8	13.5	38.65	30.3	2.77	2490	286	8.03	2.72	249	45.9
250	x	90	9	13	44.07	34.6	2.43	4180	306	9.74	2.64	335	46.5
250	x	90	11	[illegible]	51.17	40.2	2.39	4690	342	9.57	2.58	375	51.7
300	x	90	10	[illegible]	55.74	43.8	2.33	7400	373	11.5	2.54	494	56
300	x	90	12	16	61.9	48.6	2.25	7870	391	11.3	2.51	525	57.9
380	x	100	10.5	16	69.39	54.5	2.41	14500	557	14.5	2.83	762	73.3

Jawab :

$$A_1 = 150 \times 12 = 1800\text{mm}^2 \qquad \bar{y}_1 = (500/2) + (12/2) = 256\text{mm}$$

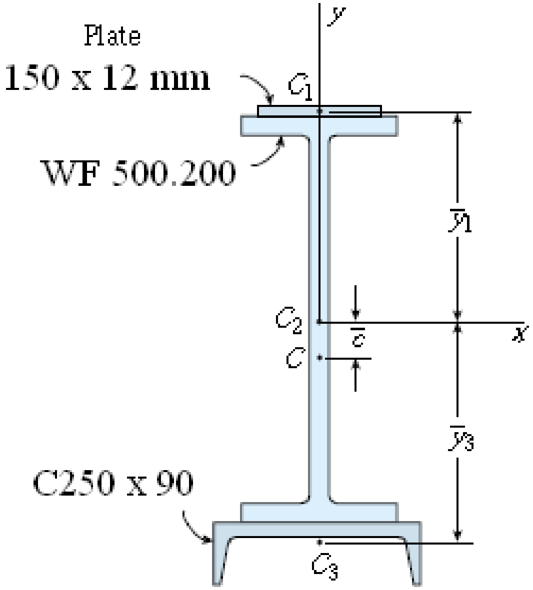
$$A_2 = 11.420\text{mm}^2 \qquad \bar{y}_2 = 0\text{mm}$$

$$A_3 = 4.407\text{mm}^2 \qquad \bar{y}_3 = -(500/2) - 24{,}3 = -149{,}3\text{mm}$$

$$A = \sum_{i=1}^{3} A_i = A_1 + A_2 + A_3 = 17.627\text{mm}^2$$

$$Q_x = \sum_{i=1}^{3} \bar{y}_i A_i = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3 = -197.165{,}1\text{mm}^3$$

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{-197.165{,}1}{17.627} = -11{,}185\text{mm}$$

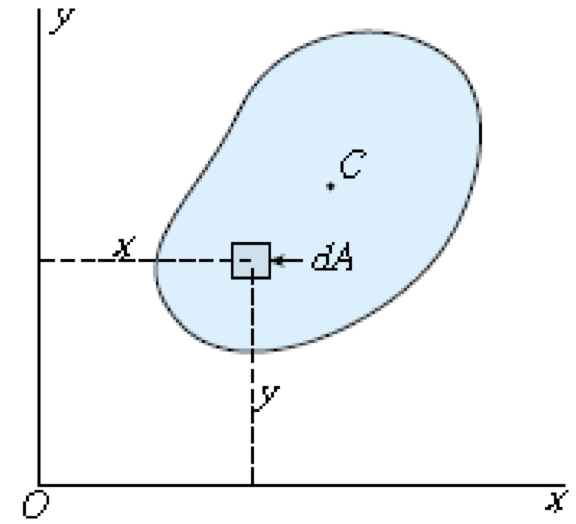


Soal 2.1 – 2.10

Momen Inersia

- Momen Inersia (*I*) suatu bidang terhadap sumbu *x* dan *y* didefinisikan dalam bentuk integral sebagai berikut :

$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA$$

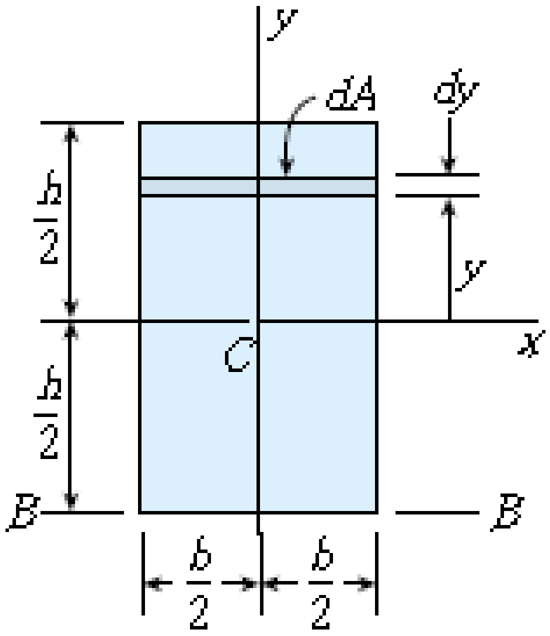


- Karena elemen *dA* dikalikan dengan kuadrat jarak dari sumbu referensi, maka momen inersia disebut juga **momen kedua dari area**
- Momen Inersia suatu area selalu bernilai positif dan memiliki satuan panjang pangkat empat (mm^4, in^4, m^4 dst.)

Momen Inersia

- Tinjau sebuah persegi panjang dengan lebar *b* dan tinggi *h*
- Sumbu *x*, *y* melalui pusat berat C
- Elemen luas diferensial *dA*, diambil berupa strip horizontal tipis dengan lebar *b* dan tinggi *dy* (*dA* = *b*·*dy*)
- Sehingga momen inersia terhadap sumbu *x* adalah :

$$I_x = \int y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b \cdot dy = \frac{bh^3}{12}$$



I_y = ???

I_{BB} = ???

Momen Inersia

Radius Girasi

- Radius Girasi suatu area bidang didefinisikan sebagai **akar dari momen inersia untuk area tersebut dibagi dengan luasnya**
- Radius Girasi (*r*) terhadap sumbu *x* dan *y* dapat dituliskan dalam bentuk persamaan sebagai berikut :

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

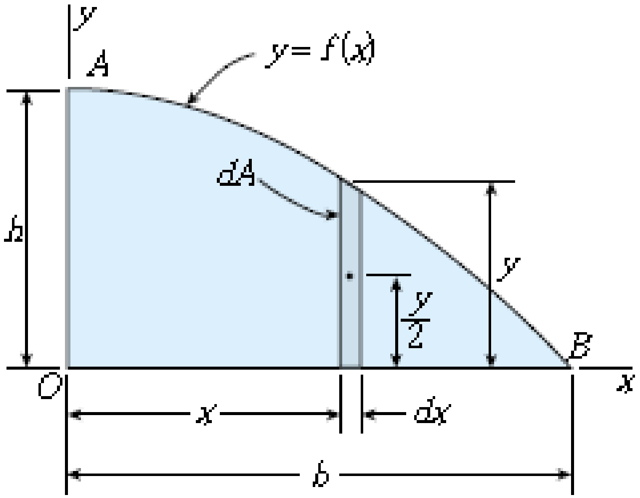
Momen Inersia

Contoh 3

Tentukan momen inersia I_x dan I_y dari sebuah semi segmen parabolik OAB dengan persamaan :

$$y = f(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$$

(area ini sama dengan yang dipakai dalam Contoh 4-1)



Jawab :

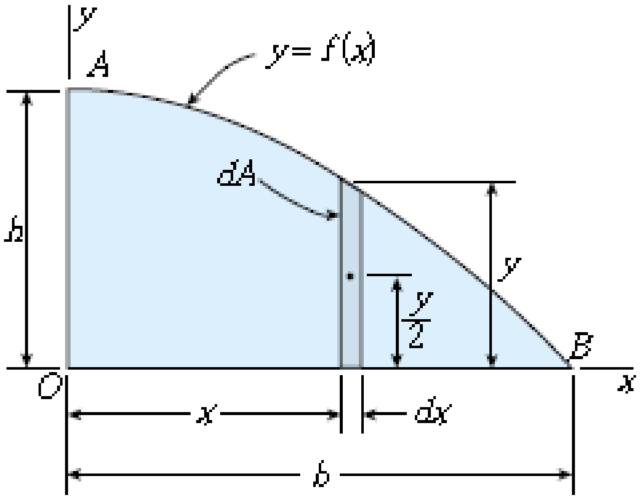
Elemen diferensial *dA* dipilih berupa strip vertikal yang lebarnya *dx* dan tingginya *y*.

$$dA = y\,dx = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)dx$$

$$I_y = \int x^2 dA = \int_0^b x^2 h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)dx = \frac{2hb^3}{15}$$

Karena $dI_x = \frac{1}{3}(dx)y^3 = \frac{y^3}{3}dx$, maka :

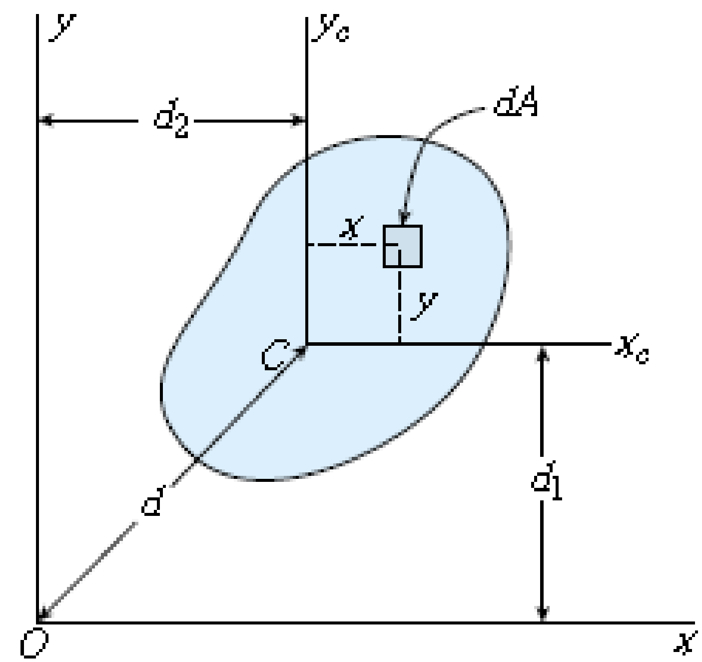
$$I_x = \int_0^b \frac{y^3}{3}dx = \int_0^b \frac{h^3}{3}\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)^3 dx = \frac{16bh^3}{105}$$



Soal 2.11 – 2.17

Teorema Sumbu Sejajar

- Teorema sumbu sejajar memberikan hubungan antara momen inersia terhadap sumbu berat dan momen inersia terhadap sumbu lain yang sejajar dengannya.
- Tinjau suatu area sembarang dengan pusat berat C yang dilengkapi dengan dua sistem koordinat, yaitu sistem $x_c y_c$ (yang berpusat di pusat berat C), serta sistem *xy* (yang sejajar $x_c y_c$, dan berpusat di O)
- Jarak antara kedua sistem koordinat adalah d_1 dan d_2.



Teorema Sumbu Sejajar

- Dengan menggunakan definisi momen inersia, maka dapt dituliskan persamaan untuk momen inersia I_x, terhadap sumbu *x* yaitu :

$$I_x = \int (y + d_1)^2 dA = \int y^2 dA + 2d_1 \int y dA + d_1^{\,2} \int dA$$

$$I_x = I_{xc} + A \cdot d_1^{\,2}$$

- Dengan cara sama dituliskan momen inersia terhadap *y*, I_y :

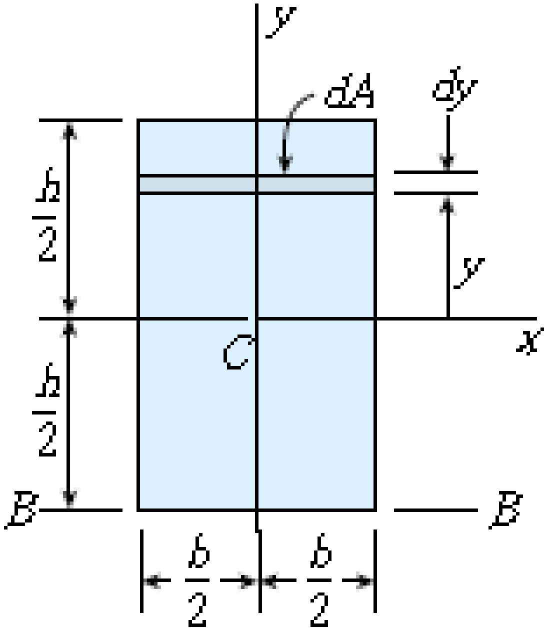
$$I_y = I_{yc} + A \cdot d_2^{\,2}$$

- Kedua persamaan tersebut menyatakan **teorema sumbu sejajar** untuk momen inersia

Teorema Sumbu Sejajar : Momen Inersia suatu area terhadap sembarang sumbu di dalam bidangnya sama dengan momen inersia terhadap sumbu berat sejajar ditambah dengan hasil kali luas tersebut dan kuadrat jarak antara kedua sumbu

Teorema Sumbu Sejajar

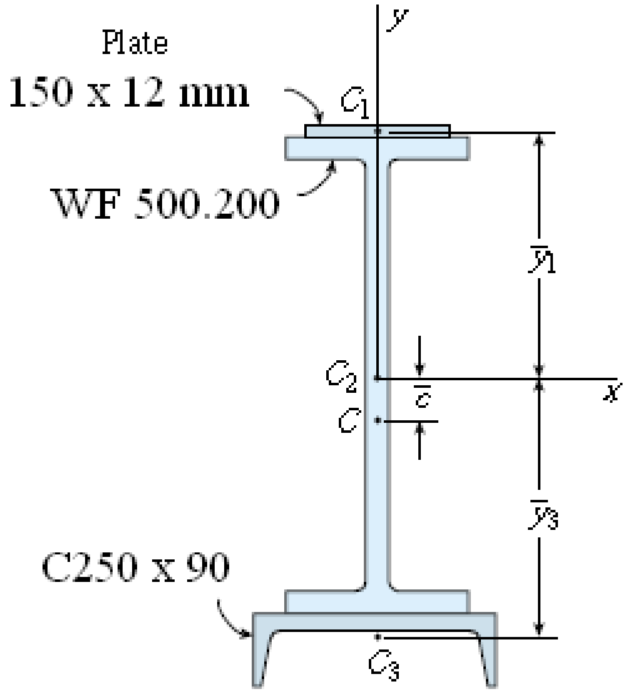
- Tentukan besarnya I_{BB} dengan menggunakan teorema sumbu sejajar
- Samakah hasilnya dengan menggunakan teknik integral ?



Teorema Sumbu Sejajar

Contoh 4

Tentukan momen inersia I_c terhadap sumbu horizontal C-C yang melalui pusat berat C untuk penampang dalam gambar berikut. Lokasi pusat berat sudah ditentukan dalam kuliah sebelumnya.



Jawab :

Dari contoh sebelumnya diperoleh :

$A_1 = 150 \times 12 = 1800\text{mm}^2$ $\bar{y}_1 = 256\text{mm}$

$A_2 = 11.420\text{mm}^2$ $\bar{y}_2 = 0\text{mm}$

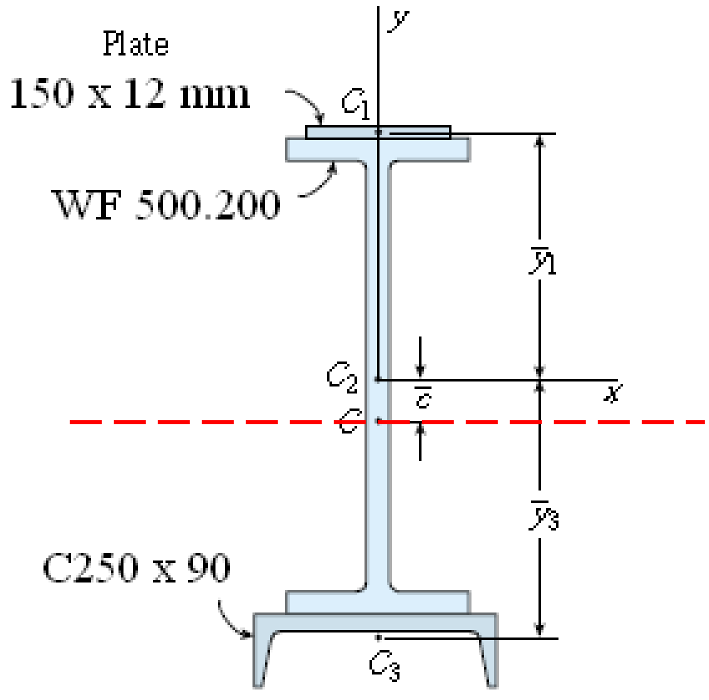
$A_3 = 4.407\text{mm}^2$ $\bar{y}_3 = 149{,}3\text{mm}$

c = 11,185 mm

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} = \frac{150 \times 12^3}{12} = 21.600 mm^4$$

$$I_2 = 47.800 \times 10^4 mm^4$$

$$I_3 = 342 \times 10^4 mm^4$$



Inersia masing-masing bagian terhadap sumbu C-C :

$$I_{c1} = I_1 + A_1(\bar{y}_1 + c)^2 = 128.539.816{,}6 mm^4$$

$$I_{c2} = I_2 + A_2 c^2 = 479.428.690{,}3 mm^4$$

$$I_{c3} = I_3 + A_3(\bar{y}_3 - c)^2 = 87.486.844{,}5 mm^4$$

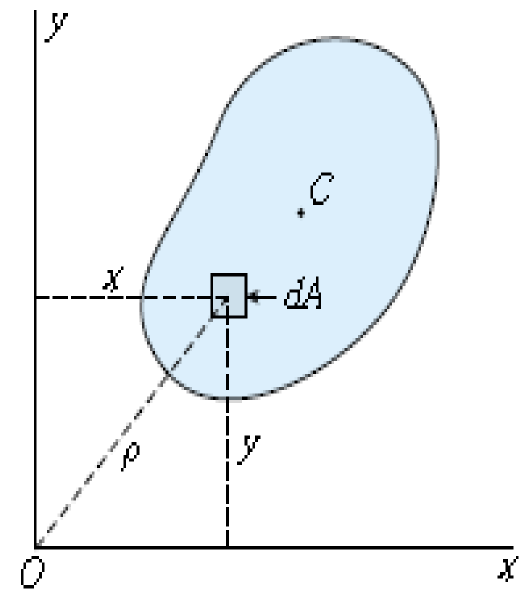
Sehingga $I_c = I_{c1} + I_{c2} + I_{c3}$ = 695.455.351,4 mm^4

Soal 2.18 – 2.21

Momen Inersia Polar

- Momen inersia yang dibahas sejauh ini didefinisikan terhadap sumbu yang terletak di dalam bidang area itu sendiri, seperti sumbu *x* dan *y* dalam gambar
- Kini akan ditinjau **sumbu yang tegak lurus bidang area dan berpotongan dengan bidang tersebut di titik pusat O**
- Momen inersia terhadap sumbu yang tegak lurus ini disebut **momen inersia polar (I_p)** yang dapat didefinisikan dalam bentuk :

$$I_p = \int \rho^2 dA$$

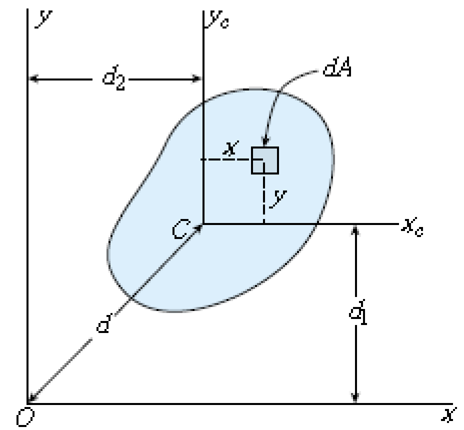


Momen Inersia Polar

- Besaran ρ adalah jarak dari titik O ke elemen luas diferensial *dA*
- Karena $\rho^2 = x^2 + y^2$, maka :

$$I_p = \int \rho^2 dA = \int \left(x^2 + y^2\right) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

$$I_p = I_x + I_y$$



- Dengan menggunakan teorema sumbu sejajar dapat dinyatakan pula bahwa :

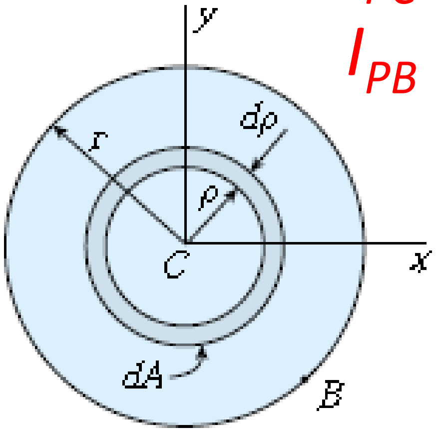
$$\left(I_p\right)_O = \left(I_p\right)_C + Ad^2$$

Momen Inersia Polar

Contoh 5

Tentukan momen inersia polar (I_p) dari suatu lingkaran dengan jari-jari *r*, terhadap pusat berat C, serta terhadap titik B di tepi luar lingkaran.

I_{PC} = ???
I_{PB} = ???



Jawab :

$$(I_P)_c = \int \rho^2 dA = \int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$(I_P)_B = (I_P)_c + Ad^2 = \frac{\pi r^4}{2} + \pi r^2 (r^2) = \frac{3\pi r^4}{2}$$

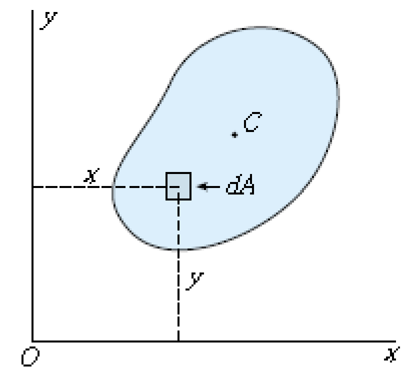
Soal 2.22 – 2.25

Produk Inersia

- Produk inersia suatu area terhadap sumbu *x* dan *y*, didefinisikan dalam bentuk integral sebagai berikut :

$$I_{xy} = \int xy\,dA$$

- Produk inersia **dapat bertanda positif, negatif atau bernilai nol**
- **Produk inersia suatu area adalah nol terhadap sepasang sumbu yang salah satunya merupakan sumbu simetri dari area tersebut**

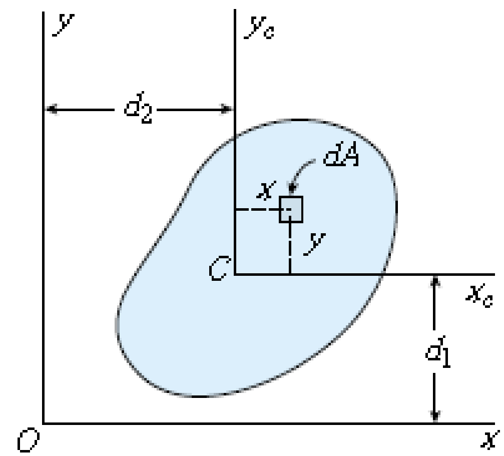


Produk Inersia

- Dengan menggunaka teorema sumbu sejajar, maka produk inersia dapat dituliskan sebagai berikut :

$$I_{xy} = I_{xc.yc} + A \cdot d_1 \cdot d_2$$

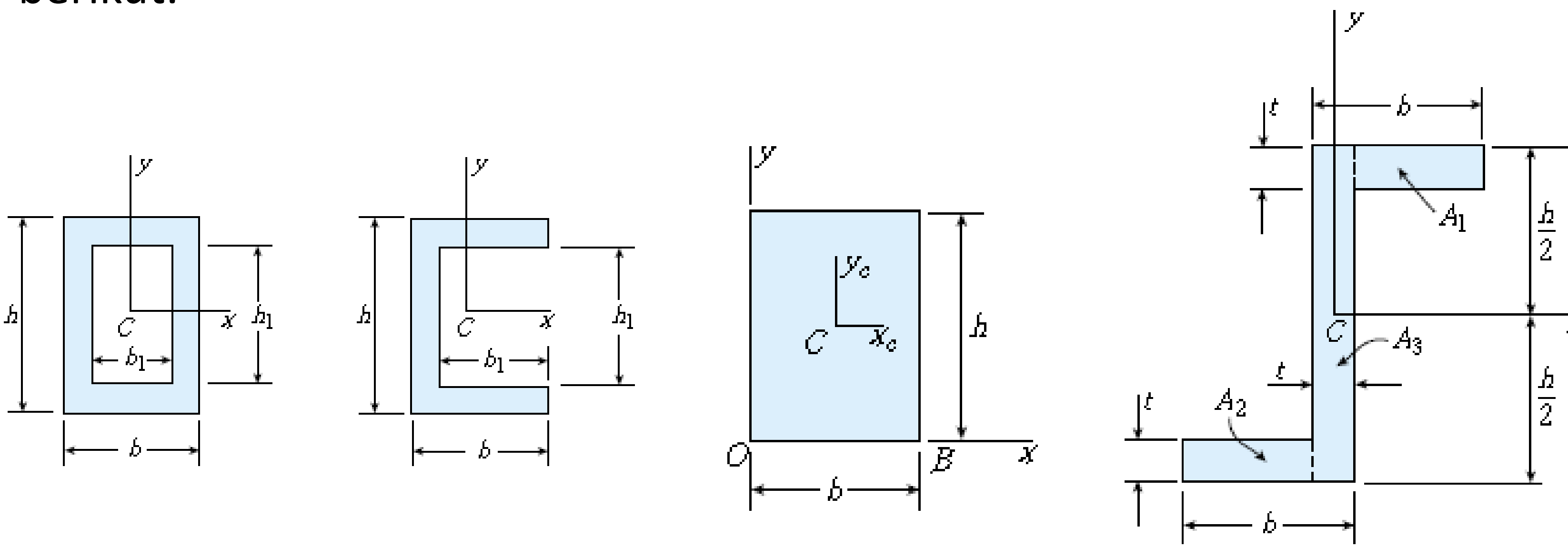
- **Produk Inersia untuk suatu area terhadap sepasang sumbu dalam bidang sama dengan produk inersia terhadap sumbu yang sejajar sumbu berat ditambah hasil kali luas dan koordinat pusat berat terhadap sepasang sumbu tersebut**



Produk Inersia

Contoh 6

Tentukanlah produk inersia I_{xy} dari penampang-penampang dalam gambar berikut.



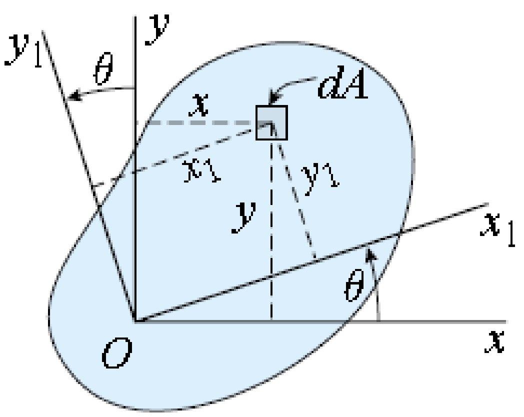
Soal 2.26 – 2.31

Rotasi Sumbu

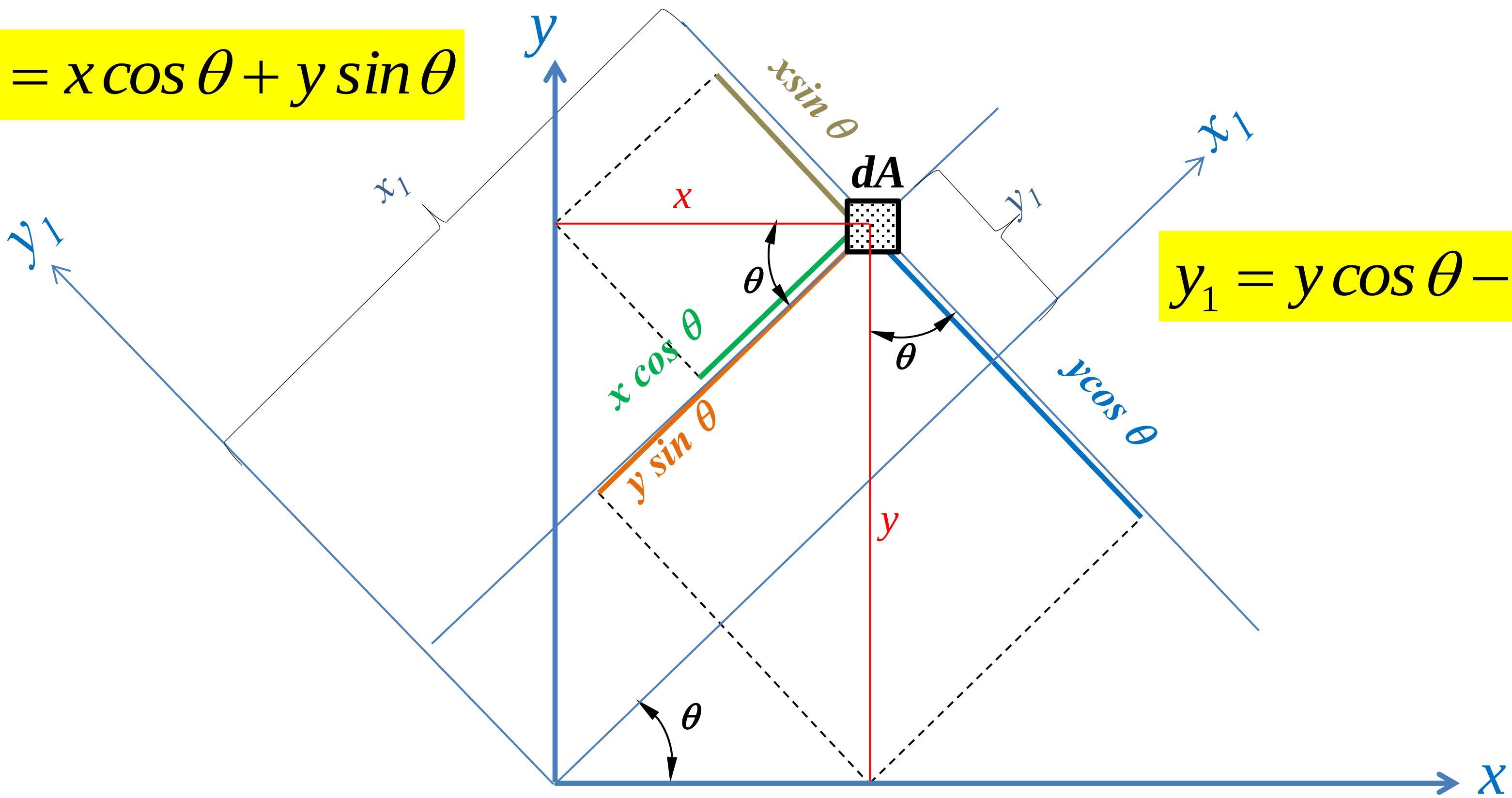
- Tinjau suatu area bidang dalam sistem sumbu *xy*, maka besarnya momen inersia dan produk inersia terhadap sumbu-sumbu tersebut adalah :

$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA \qquad I_{xy} = \int xy dA$$

- Selanjutnya terdapat sumbu x_1y_1 yang sepusat dengan sumbu *xy* namun diputar melalui sudut θ berlawanan jarum jam terhadap *xy*



$$x_1 = x\cos\theta + y\sin\theta$$



$$y_1 = y\cos\theta - x\sin\theta$$

Rotasi Sumbu

- Sehingga momen inersia terhadap sumbu x_1 adalah

$$I_{x1} = \int {y_1}^2 dA = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 dA$$

$$= \cos^2\theta \int y^2 dA + \sin^2\theta \int x^2 dA - 2\sin\theta\cos\theta \int xy dA$$

$$= I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

Rotasi Sumbu

- Dengan mengingat hubungan trigonometri :

$$cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + cos\,2\theta) \qquad sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - cos\,2\theta) \qquad 2\,sin\,\theta\,cos\,\theta = sin\,2\theta$$

- Maka momen inersia terhadap sumbu x_1 adalah :

$$I_{x1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}cos\,2\theta - I_{xy}\,sin\,2\theta$$

- Dengan cara sama dapat diperoleh momen inersia untuk sumbu y_1

$$I_{y1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}cos\,2\theta + I_{xy}\,sin\,2\theta$$

Rotasi Sumbu

- Produk inersia terhadap sumbu x_1y_1 dapat dituliskan sebagai berikut :

$$I_{x1y1} = \int x_1 y_1 dA = \int (x\cos\theta + y\sin\theta)(y\cos\theta - x\sin\theta) dA$$

$$= (I_x - I_y)\sin\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

- Dengan menggunakan aturan trigonometri sekali lagi dapat dirumuskan produk inersia terhadap sumbu x_1y_1 dalam bentuk :

$$I_{x1y1} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

Rotasi Sumbu

- Dari rumusan untuk I_{x1} dan I_{y1}, akhirnya dapat diperoleh suatu hubungan khusus sebagai berikut :

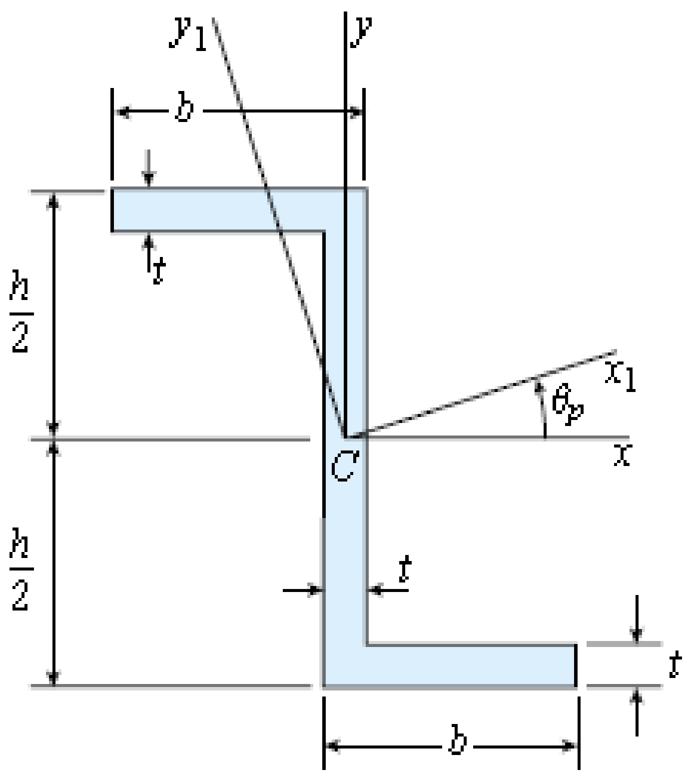
$$I_{x1} + I_{y1} = I_x + I_y$$

- Persamaan ini hendak menunjukkan bahwa jumlah momen inersia terhadap sepasang sumbu akan tetap konstan apabila sumbu-sumbunya diputar terhadap pusatnya
- Ingat pula hubungan $I_x + I_y = I_p$!!

Sumbu Utama dan Momen Inersia Utama

Contoh 7

Tentukan I_{x1}, I_{y1} dan I_{x1y1} dari suatu penampang Z pada gambar. Jika sumbu xy diputar 30° berlawanan jarum jam. Gunakan nilai h = 200 mm, b = 90 mm dan t = 15 mm



Dari perhitungan yang sudah dilakukan diperoleh :

$I_x = 29{,}29 \cdot 10^6\ \text{mm}^4$

$I_y = 5{,}667 \cdot 10^6\ \text{mm}^4$

$I_x = -9{,}366 \cdot 10^6\ \text{mm}^4$

$$I_{x1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$= \frac{(29{,}29 + 5{,}667)\cdot 10^6}{2} + \frac{(29{,}29 - 5{,}667)\cdot 10^6}{2} \cos 60^o - \left(-9{,}366 \cdot 10^6\right) \sin 60^o$$

$$= ....$$

$I_x = 29{,}29 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$I_y = 5{,}667 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$I_x = -9{,}366 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$\theta = 30^o$

$$I_{y1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$= \frac{(29{,}29 + 5{,}667)\cdot 10^6}{2} - \frac{(29{,}29 - 5{,}667)\cdot 10^6}{2} \cos 60^o + \left(-9{,}366 \cdot 10^6\right) \sin 60^o$$

$$= ....$$

Soal 2.32 – 2.35

Sumbu Utama dan Momen Inersia Utama

- Persamaan – persamaan untuk momen inersia dengan sumbu yang dirotasi sering disebut juga sebagai **persamaan transformasi**
- Pada persamaan tersebut terdapat variabel sudut rotasi θ, yang besarnya dapat berubahan- ubah
- Pada suatu nilai θ tertentu, maka akan menghasilkan nilai fungsi yang maksimum atau minimum.
- Nilai maksimum dan minimum dari momen inersia tersebut dinamakan sebagai **momen inersia utama (*principal moments of inertia*)**
- Sedangkan sumbu yang berkaitan dinamakan **sumbu utama (*principal axes*)**

Sumbu Utama dan Momen Inersia Utama

- Untuk mencari nilai θ yang menghasilkan momen inersia I_{x1} yang maksimum atau minimum, maka dapat diambil turunan I_{x1} terhadap θ dan menyamakannya dengan nol

$$\frac{dI_{x1}}{d\theta} = \left(I_x - I_y\right) \sin 2\theta + 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

- Dari persamaan tersebut dapat dituliskan hubungan :

$$\boxed{\tan 2\theta_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}}$$

Sumbu Utama dan Momen Inersia Utama

- Sudut θ_p menunjukkan sudut yang memberikan sumbu utama
- Persamaan tersebut akan menghasilkan dua nilai sudut $2\theta_p$ dalam selang $0^o - 360^o$, yang keduanya berbeda 180^o
- Hal ini berarti kedua harga θ_p berselisih 90^o, atau dengan kata lain keduanya **saling tegak lurus**
- Salah satu sumbu berkaitan dengan momen inersia maksimum dan satu lagi dengan momen inersia minimum

Sumbu Utama dan Momen Inersia Utama

- Sekarang tinjau variasi produk inersia I_{x1y1} apabila sudut θ bervariasi
- Jika $\theta = 0$, diperoleh $I_{x1y1} = I_{xy}$
- Jika $\theta = 90^o$, diperoleh $I_{x1y1} = -\, I_{xy}$
- Artinya selama berputar 90°, produk inersia akan berubah tanda, dan berarti pula pada salah satu sumbu ada nilai produk inersia yang sama dengan nol
- Samakan persamaan I_{x1y1} dengan nol

$$I_{x1y1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$(I_x - I_y) \sin 2\theta + 2I_{xy} \cos 2\theta = 0 \Rightarrow$$ **Merupakan persamaan untuk sumbu utama**

Produk Inersia bernilai nol pada sumbu utama

Sumbu Utama dan Momen Inersia Utama

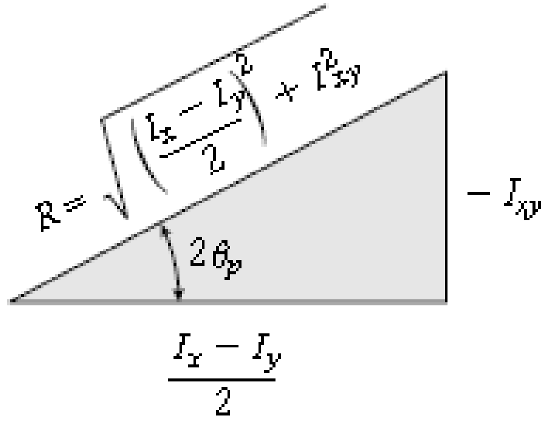
- Sumbu utama yang melalui pusat O adalah sepasang sumbu orthogonal dengan momen inersia maksimum dan minimum
- Orientasi sumbu utama dinyatakan dengan sudut θ_p
- Produk inersia adalah nol pada sumbu utama
- Sumbu simetri selalu merupakan sumbu utama
- Titik yang dilewati oleh semua sumbu utama disebut titik utama (principal point)

Sumbu Utama dan Momen Inersia Utama

- Dari rumusan untuk *tan* $2\theta_p$, dapat dituliskan pula

$$\cos 2\theta_p = \frac{I_x - I_y}{2R} \qquad \sin 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{R}$$

- R selalu diambil bernilai positif, dan merupakan sisi miring segitiga dalam gambar



Sumbu Utama dan Momen Inersia Utama

- Substitusikan nilai *cos* $2\theta_p$ dan *sin* $2\theta_p$ ke dalam rumusan untuk I_{x1}, guna mendapatkan momen inersia utama yang lebih besar

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^{\ 2}}$$

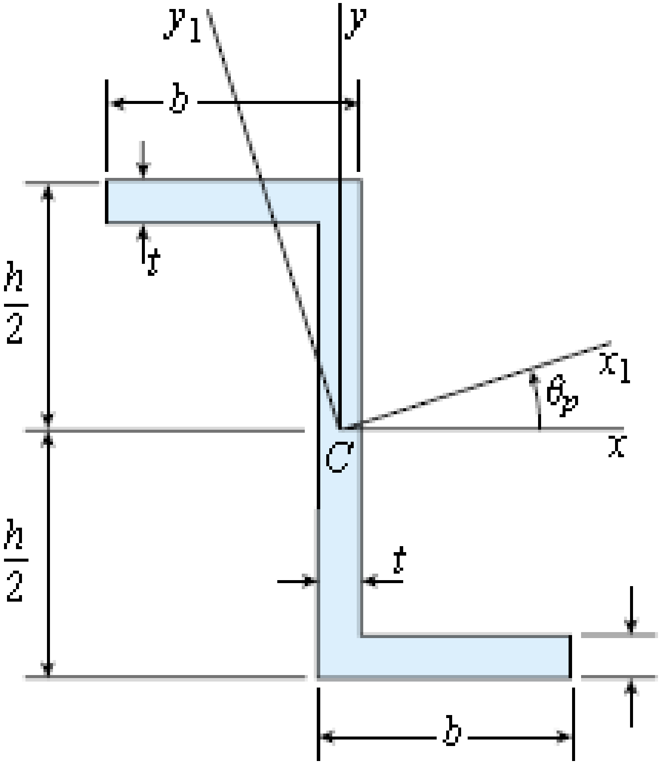
- Momen inersia utama yang lebih kecil diperoleh dari $I_1 + I_2 = I_x + I_y$, atau

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^{\ 2}}$$

Sumbu Utama dan Momen Inersia Utama

Contoh 8

Tentukan orientasi sumbu utama serta besarnya momen inersia utama dari suatu penampang Z pada gambar. Gunakan nilai *h* = 200 mm, *b* = 90 mm dan *t* = 15 mm



Dari perhitungan yang sudah dilakukan diperoleh :

$I_x = 29{,}29 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$I_y = 5{,}667 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$I_x = -9{,}366 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$$I_{x1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} cos\, 2\theta - I_{xy}\, sin\, 2\theta$$

$$I_{y1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} cos\, 2\theta + I_{xy}\, sin\, 2\theta$$

Jawab :

Hasil perhitungan momen inersia memberikan :

$I_x = 29{,}29 \cdot 10^6$ mm^4 $I_y = 5{,}667 \cdot 10^6$ mm^4 $I_{xy} = -\,9{,}366 \cdot 10^6$ mm^4

Dari persamaan 2.26 :

$$\tan 2\theta_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = 0{,}7930 \quad 2\theta_p = 38{,}4^\circ \text{ atau } 218{,}4^\circ$$

Sehingga $\theta_p = 19{,}2^\circ$ dan $109{,}2^\circ$

Dengan menggunakan kedua harga θ_p ini dalam persaman transformasi untuk I_{x1} , diperoleh $I_1 = 32{,}6 \cdot 10^6$ mm^4 dan $I_2 = 2{,}4 \cdot 10^6$ mm^4.

Soal 2.36 – 2.38