Universitas Pembangunan Jaya

*a home base to excellence*

Mata Kuliah : Kalkulus
Kode : TSP – 102
SKS : 3 SKS

# *Limit Fungsi*

Pertemuan - 2

- TIU :
  - Mahasiswa dapat memahami limit fungsi
- TIK :
  - Mahasiswa mampu menyelesaikan limit fungsi
  - Mahasiswa mampu menghitung limit pada tak berhingga dan limit tak hingga
  - Mahasiswa mampu menjelaskan arti fungsi kontinu
  - Mahasiswa mampu menentukan kekontinuan fungsi

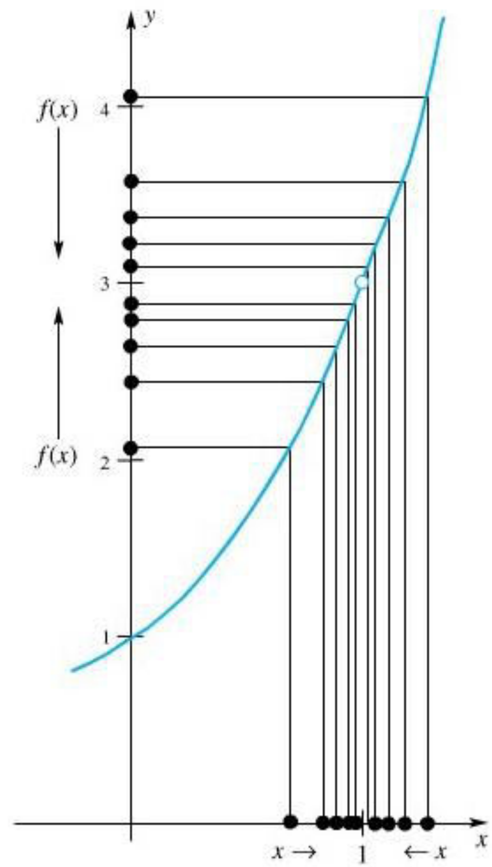
- Sub Pokok Bahasan :
  - ✓ Pendahuluan Limit
  - ✓ Teorema Limit
  - ✓ Limit Pada Tak Hingga
  - ✓ Limit Tak Hingga
  - ✓ Kekontinuan Fungsi

# Limit Fungsi

- Tinjau fungsi yang ditentukan oleh : $$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

- Fungsi tidak terdefinisi pada $x = 1$
- Tapi apa yang terjadi jika $x$ dibuat mendekati 1 ?

| $x$ | $y = \frac{x^3-1}{x-1}$ |
|---|---|
| 1.25 | 3.813 |
| 1.1 | 3.310 |
| 1.01 | 3.030 |
| 1.001 | 3.003 |
| ↓ | ↓ |
| 1.000 | ? |
| ↑ | ↑ |
| 0.999 | 2.997 |
| 0.99 | 2.970 |
| 0.9 | 2.710 |
| 0.75 | 2.313 |




Graph of $y = f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana *x* dekat tetapi tidak sama dengan *c*, maka f(*x*) dekat ke *L*

# Limit Fungsi

- Contoh-contoh : tentukan nilai limit berikut

$$\lim_{x\to 3}(4x-5) \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

- Definisi formal limit :

$\lim_{x\to c} f(x)=L$, berarti bahwa untuk tiap $\varepsilon > 0$ (betapapun kecilnya), terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$, asalkan bahwa $0 < |x - c| < \delta$, atau dikatakan :

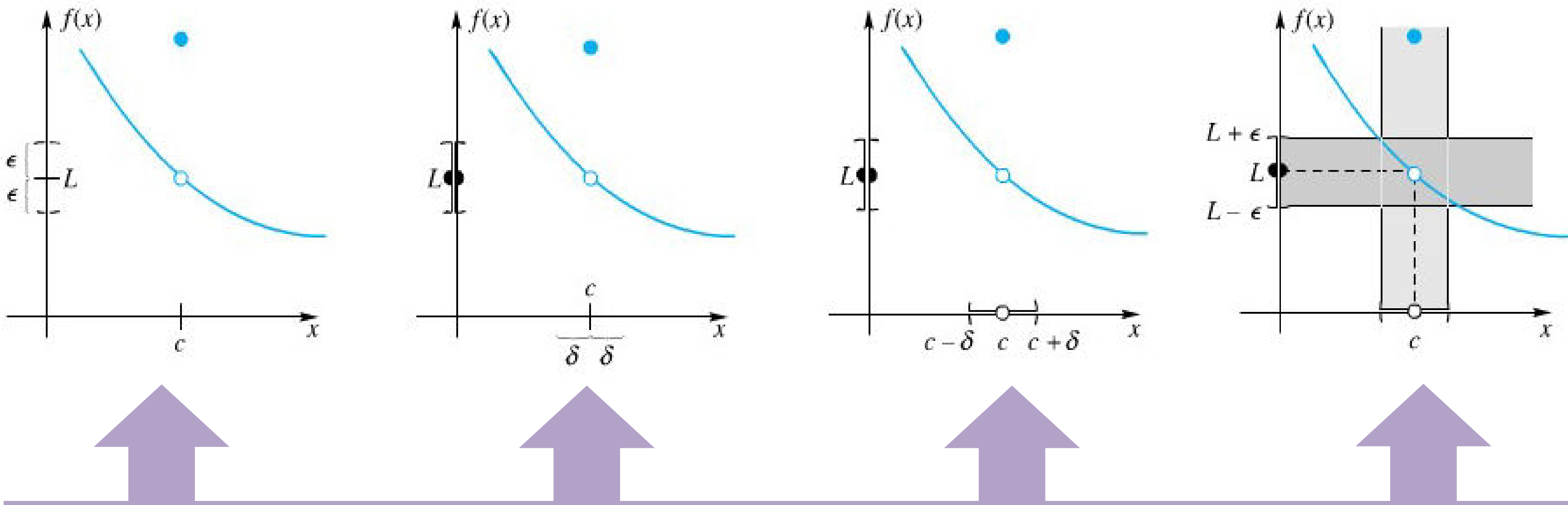
$$0 < |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

*x cukup dekat dengan c*

$f(x)$ berbeda dari $L$ sebesar lebih kecil dari $\varepsilon$

***$\varepsilon$ & $\delta$ adalah bilangan positif kecil***

# Limit Fungsi

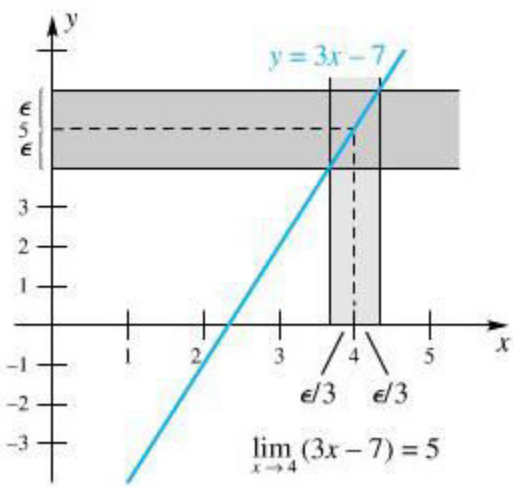


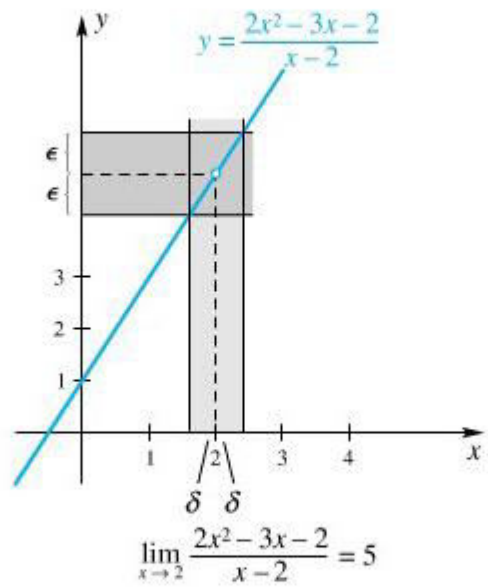

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ Terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $0 < |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

# Limit Fungsi

- Contoh-contoh : buktikan dengan Teorema Limit

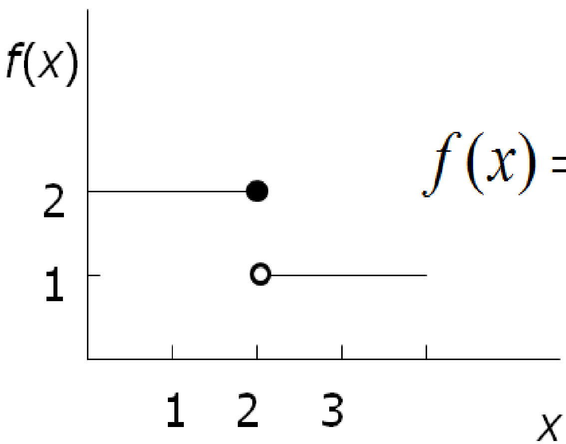
$$\lim_{x\to 4}(3x-7)=5 \qquad \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=5$$



## ❖ Limit Kiri dan Limit Kanan

$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tetapi pada sebelah kanan c, maka *f*(*x*) dekat ke *L*. Hal yang serupa, mengatakan bahwa $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$ , berarti bahwa bilamana *x* dekat tetapi pada sebelah kiri *c*, maka *f*(*x*) adalah dekat ke *L.*




$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{for } x \le 2 \\ 1 & \text{for } x > 2 \end{cases}$$

Dalam hal ini $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ **tidak ada**, tapi dapat dituliskan :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$$

**Teorema**

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$

- Concept Review :

1. $\lim_{x \to c} f(x) = L$ , berarti bahwa $f(x)$ menjadi dekat ke ….. bilamana $x$ menjadi cukup dekat ke (tetapi tidak sama) dengan …..
2. $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$, berarti bahwa $f(x)$ menjadi dekat ke ….. bilamana $x$ mendekati $c$ dari …..
3. Jika $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ , maka ……
4. Ketaksamaan $|f(x) - L| < \varepsilon$, setara dengan … < $f(x)$ < …
5. Makna yang tepat dari $\lim_{x \to a} f(x) = L$ adalah : Diberikan sembarang bilangan positif $\varepsilon$, terdapat suatu bilangan positif $\delta$ yang berpadanan sedemikian rupa sehingga ….. mengimplikasikan …..
6. Agar yakin bahwa $|3x - 3| < \varepsilon$, kita seharusnya mensyaratkan bahwa $|x - 1| <$ ……

- **Latihan Soal**
  - **Problem Set 1.1 No. 1 – 18**
  - **Problem Set 1.2 No. 11 - 22**

Universitas Pembangunan Jaya

## Teorema Utama Limit

Andaikan *n* adalah bilangan bulat positif, *k* adalah konstanta, dan *f* dan *g* adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di *c*, maka :

1. $\lim_{x \to c} k = k;$ 2. $\lim_{x \to c} x = c$
3. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$
4. $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$
5. $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$
6. $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$
7. $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$
8. $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$
9. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$

### Contoh-Contoh :

carilah nilai limitnya

$$\lim_{x \to 3} 2x^4$$

$$\lim_{x \to 4} (3x^2 - 2x)$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x}$$

## ❖ Teorema Substitusi

Jika $f$ suatu fungsi polinom atau fungsi rasional, maka $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Asalkan $f(c)$ terdefinisi. Dalam kasus fungsi rasional nilai penyebut di c tidak nol

**Contoh :** hitung nilai limitnya

1. $\lim_{x \to 2} \dfrac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$
2. $\lim_{t \to 2} \dfrac{t^2 + 3t - 10}{t^2 + t - 6}$

Fungsi polinom $f$, mempunyai bentuk :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Fungsi rasional adalah hasil bagi dua fungsi polinom

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Universitas Pembangunan Jaya

# Limit Fungsi Trigonometri

1. $\lim_{x \to c} \sin t = \sin c;$
2. $\lim_{x \to c} \cos t = \cos c$
3. $\lim_{t \to c} \tan t = \tan c;$
4. $\lim_{t \to c} \cot t = \cot c$
5. $\lim_{t \to c} \sec t = \sec c;$
6. $\lim_{t \to c} \csc t = \csc c$
7. $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$
8. $\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$

**Contoh-Contoh :**

carilah nilai limitnya

$$\lim_{t \to 0} \frac{t^2 \cos t}{t+1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{\sin t}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\tan x}$$

**Problem Set 1.3 No. 1 – 24**
**Problem Set 1.4 No. 1 – 14**

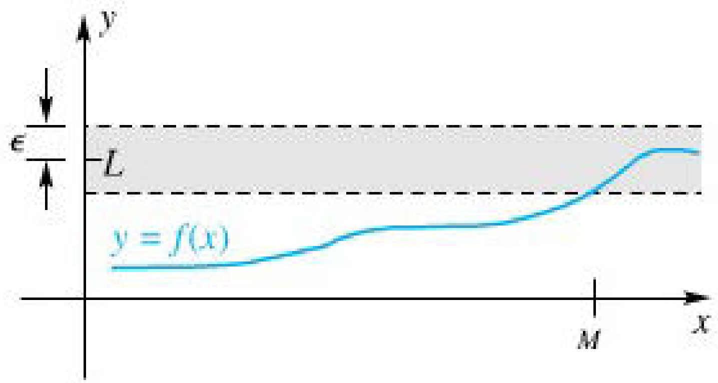
Universitas Pembangunan Jaya

## ❖ Limit Pada Tak Berhingga

**<u>Limit x $\rightarrow\infty$</u>**

Misalkan $f$ didefinisikan pada $[c,\infty)$ untuk beberapa bilangan $c$. Kita mengatakan bahwa $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan yang berkaitan $M$ sedemikian sehingga

$$x > M \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



## ❖ Limit Pada Tak Berhingga

**Limit x → − ∞**

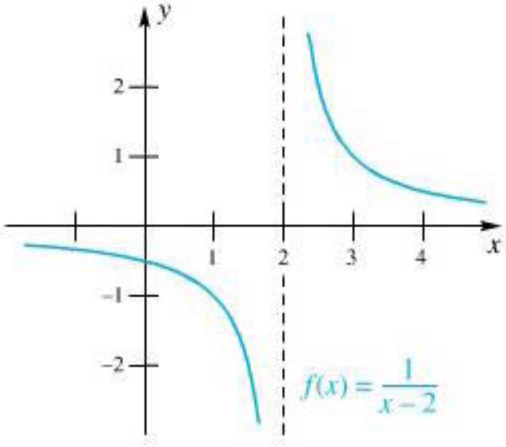
Misalkan *f* didefinisikan pada $(-\infty, c]$ untuk beberapa bilangan *c*. Kita mengatakan bahwa $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan yang berkaitan *M* sedemikian sehingga

$$x < M \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = ?? \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{1+x^3} = ??$$

## ❖ Limit Tak Berhingga

Tinjau grafik $f(x) = 1/(x - 2)$.




$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

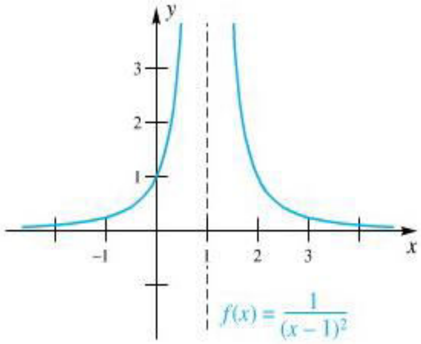
**Contoh-Contoh :**

carilah nilai limitnya

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6}$$




$\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$ , jika untuk setiap bilangan positif $M$ terdapat sebuah $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga : $0 < x - c < \delta \rightarrow f(x) > M$

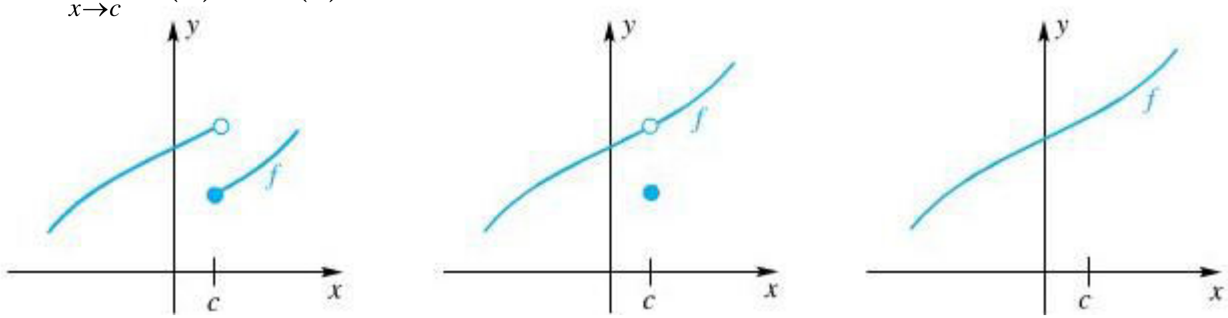
**Problem Set 1.5 No. 1 – 23 ; Tugas No : 7, 9, 11, 13, 15**

## ❖ Kekontinuan Fungsi

Apabila *f* terdefinisi pada suatu selang terbuka yang mengandung c, maka kita menyatakan bahwa *f* kontinu di c jika $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Dengan kata lain, suatu fungsi kontinu apabila terpenuhi 3 hal berikut ini :

- $\lim_{x \to c} f(x)$ ada
- *f*(*c*) ada (yakni *c* berada dalam domain *f*)
- dan $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$




$\lim_{x \to c} f(x)$ tidak ada

$\lim_{x \to c} f(x)$ ada

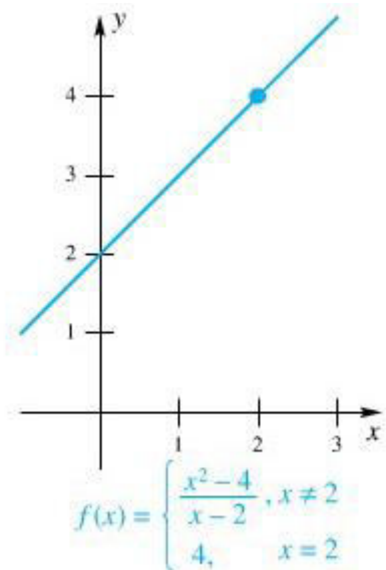
$\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

## ❖ Kekontinuan Fungsi

**Contoh :**

Andaikan $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$, $x \neq 2$. Bagaimana seharusnya $f$ didefinisikan di $x = 2$ agar kontinu di titik itu?




A point of discontinuity $c$ is called **removable** if the function can be defined or redefined at $c$ so as to make the function continuous. Otherwise, a point of discontinuity is called **nonremovable.**

Universitas Pembangunan Jaya

## Kekontinuan Fungsi

**Teorema A (Kekontinuan Fungsi Polinomial dan Rasional)**
*Fungsi polinom kontinu di setiap bilangan real c. Fungsi rasional kontinu di setiap bilangan real c dalam domainnya, kecuali pada titik yang membuat penyebut menjadi nol*

**Teorema B (Kekontinuan Nilai Mutlak dan Fungsi Akar ke-n)**
*Fungsi nilai mutlak adalah kontinu di setiap bilangan real c. Jika n ganjil, fungsi akar ke-n kontinu di setiap bilangan real c; jika n genap, fungsi ini kontinu di setiap bilangan real positif c.*

## ❖ Kekontinuan Fungsi

**<u>Teorema C</u>**

*Jika f dan g kontinu, maka demikian pula halnya dengan kf, f+g, f – g, f·g, f/g (asalkan g(c)≠0), $f^n$ dan $\sqrt[n]{f}$ (asalkan f(c) > 0 jika n genap)*

**<u>Contoh :</u>**

Pada bilangan-bilangan berapa saja *F*(*x*) berikut kontinu

$$F(x) = \frac{3|x| - x^2}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

**<u>Teorema D</u>**

*Fungsi sinus dan cosinus adalah kontinu di setiap bilangan real c. Fungsi tan x, cot x, sec x, dan csc x kontinu di setiap bilangan real c dalam domainnya*

Universitas Pembangunan Jaya

## ❖ Kekontinuan Fungsi

**Teorema E (Teorema Limit Komposisi)**

*Jika* $\lim_{x \to c} g(x) = L$ *, dan jika f kontinu di L, maka*

$$\lim_{x \to c} f((g)x) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L)$$

*Khususnya jika g kontinu di g(c), maka fungsi komposisi* $f \circ g$ *kontinu di c.*

## Contoh :

- Perlihatkan bahwa $h(x) = |x^2 - 3x + 6|$ kontinu di setiap bilangan real
- Perlihatkan bahwa $g(x)$ kontinu kecuali di 3 dan –2

$$g(x) = \sin \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 - x - 6}$$

## Kekontinuan Fungsi

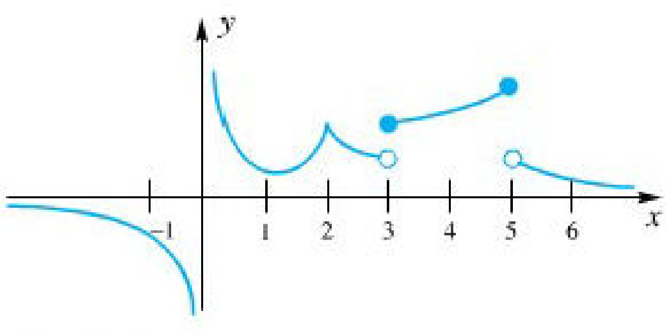
**Kekontinuan Pada Interval**

*Fungsi f adalah kontinu dari kanan di a, jika* $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ *, dan kontinu dari kiri di b jika* $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

*Kita katakan f kontinu pada suatu interval terbuka jika f kontinu pada tiap titik di interval itu. Fungsi f kontinu pada interval tertutup [a,b] jika kontinu pada (a,b) dan kontinu dari kanan di a serta kontinu dari kiri di b*

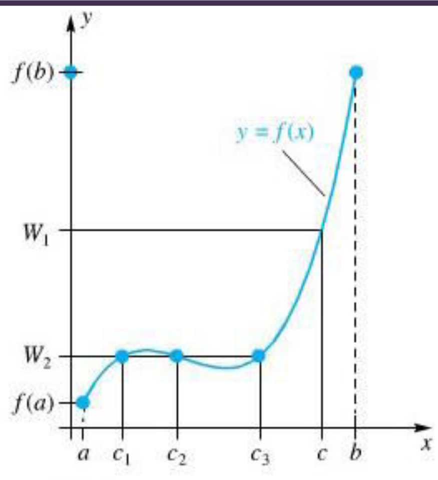
**Contoh :**

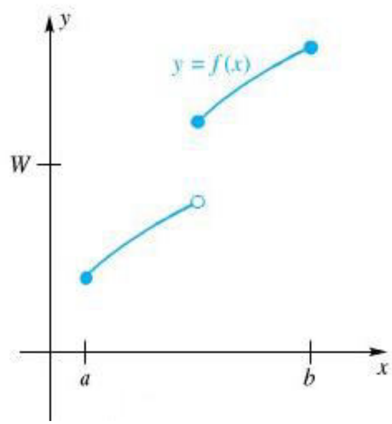
- Dengan menggunakan definisi di atas, uraikan sifat kekontinuan dari fungsi dari grafik berikut.

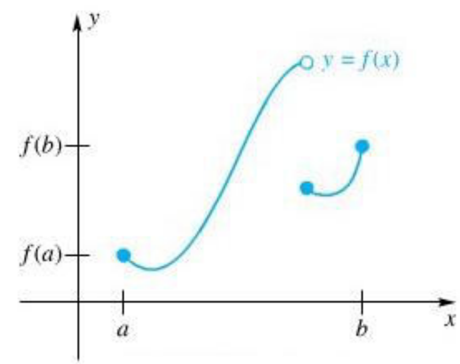


## ❖ Kekontinuan Fungsi

**Teorema F (Teorema Nilai Antara)**
*Jika f kontinu pada [a,b] dan jika W sebuah bilangan antara f(a) dan f(b), maka terdapat sebuah bilangan c di antara a dan b sedemikian sehingga f(c) = W*




***Tak kontinu, sifat nilai antara tidak berlaku***

***Tak kontinu, meskipun sifat nilai antara berlaku***

**Problem Set 1.6 No. 1 - 15**