

STATIS TAK TENTU SLOPE-DEFLECTION METHOD (BEAM)

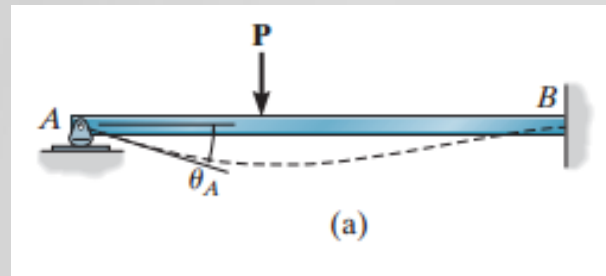
ANALISIS STRUKTUR – TSI204 (3 sks)

Pertemuan 12

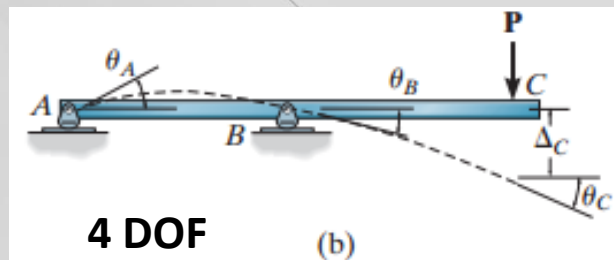
Persamaan Slope-Deflection

- Perpindahan(displacement) merupakan variabel utama yang tak diketahui, disebut pula sebagai derajat kebebasan (degree of freedom)
- Jumlah Degree of Freedom yang dimiliki suatu struktur sering juga disebutkan sebagai derajat ketidaktentuan kinematik
- Perpindahan yang dimaksud selain lendutan dapat pula berupa sudut rotasi pada suatu titik
- Selanjutnya disusun pula persamaan kompatibilitas untuk mendapatkan perpindahan dari titik-titik kumpul, dan kemudian dapat digunakan untuk menghitung reaksi tumpuan
- Tiga metode analisis struktur berbasis displacement adalah : slope-deflection, distribusi momen dan metode matriks

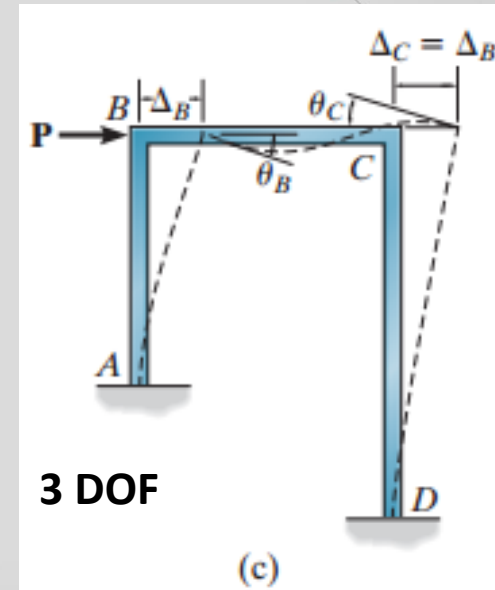
Persamaan Slope-Deflection



1 DOF



4 DOF

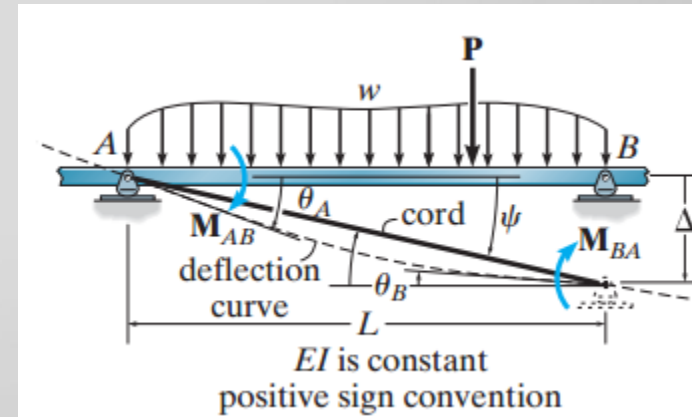


3 DOF

Persamaan Slope-Deflection

- Merupakan sebuah persamaan yang menghubungkan antara sudut rotasi (slope) dan lendutan (deflection) dengan beban yang bekerja pada struktur
- Perhatikan balok AB yang merupakan bagian dari struktur balok menerus dengan beban sembarang sebesar q . dan memiliki kekakuan seragam sebesar EI .
- Selanjutnya akan dicari hubungan antara momen ujung M_{AB} dan M_{BA} dengan sudut rotasi θ_A dan θ_B serta lendutan Δ yang mengakibatkan penurunan pada tumpuan B.

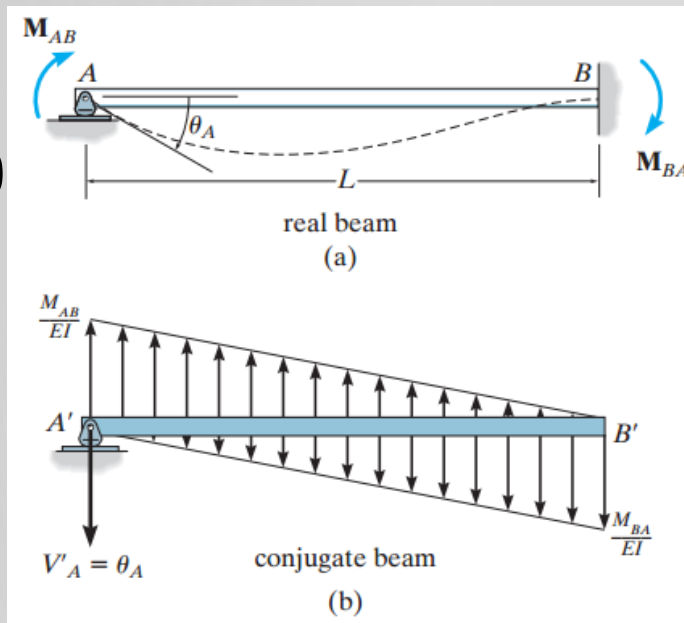
- Sesuai dengan perjanjian tanda yang dipakai, maka **momen dan sudut rotasi bernilai positif** apabila memiliki arah putar searah jarum jam.
- Sedangkan **lendutan Δ dianggap bernilai positif** apabila mengakibatkan balok berputar sebesar sudut ψ searah jarum jam.



Persamaan Slope-Deflection

- $\Sigma M_A' = 0$

- $\Sigma M_B' = 0$



$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{AB}}{EI} \right) L \right] \frac{L}{3} - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{BA}}{EI} \right) L \right] \frac{2L}{3} = 0$$

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{BA}}{EI} \right) L \right] \frac{L}{3} - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{AB}}{EI} \right) L \right] \frac{2L}{3} + \theta_A L = 0$$

$$M_{AB} = \frac{4EI}{L} \theta_A$$

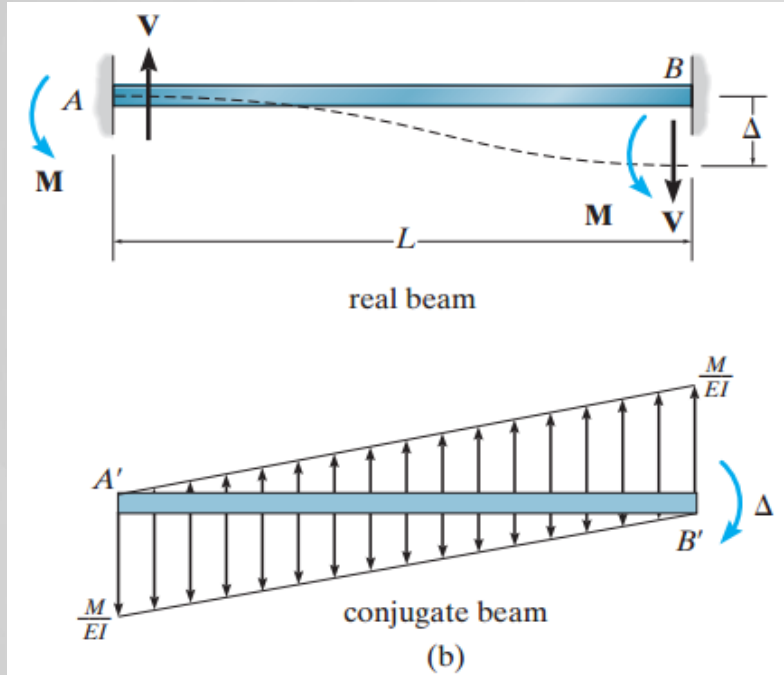
$$M_{BA} = \frac{2EI}{L} \theta_A$$

$$M_{BA} = \frac{4EI}{L} \theta_B$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L} \theta_B$$

Persamaan Slope-Deflection

$$\sum M_B = 0$$



$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \right) L \right] \frac{2L}{3} - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \right) L \right] \frac{L}{3} - \Delta = 0$$

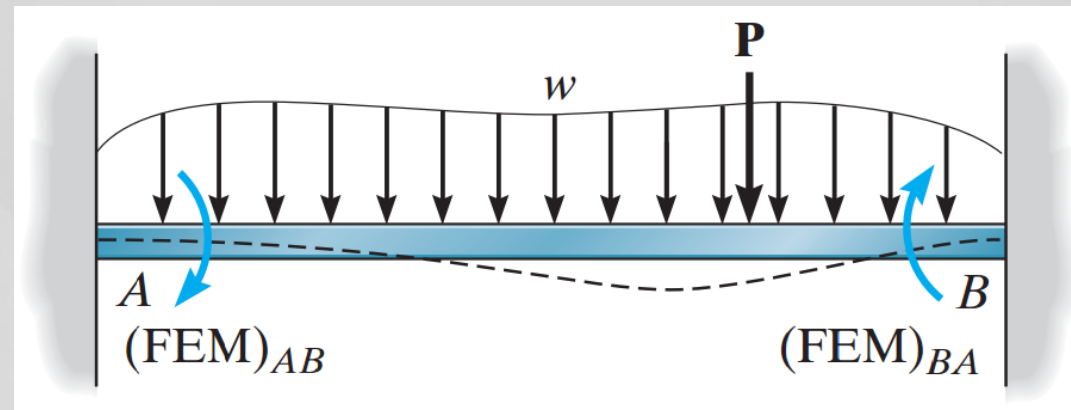
$$M_{AB} = M_{BA} = M = \frac{-6EI}{L^2} \Delta$$

Persamaan Slope-Deflection

- Dalam uraian sebelumnya telah diturunkan hubungan antara M_{AB} dan M_{BA} yang bekerja pada titik A dan B dengan perpindahan yang diakibatkan olehnya, yaitu θ_A , θ_B dan Δ .
- Pada kenyataannya perpindahan yang terjadi, baik berupa sudut rotasi maupun lendutan pada balok terjadi bukan disebabkan oleh momen pada titik tersebut, namun disebabkan oleh beban luar yang bekerja pada bentangan balok.
- Supaya beban luar tersebut dapat diakomodasi dalam persamaan *slope – deflection*, maka beban luar tersebut harus ditransformasi menjadi momen ekuivalen yang bekerja pada titik ujung balok.
- Hal ini dapat dilakukan dengan mudah, yaitu dengan menemukan reaksi momen yang timbul pada kedua ujung balok yang dianggap memiliki tumpuan jepit.

Persamaan Slope-Deflection

- Reaksi momen tersebut selanjutnya diistilahkan dengan sebutan *Fixed-End Moment* (FEM)
- Sesuai dengan perjanjian tanda, maka nilai FEM pada ujung A adalah negatif (berlawanan dengan jarum jam), dan nilai FEM pada ujung B adalah positif (searah jarum jam)



Fixed End Moment

$(FEM)_{AB} = \frac{PL}{8}$
 $(FEM)_{BA} = \frac{PL}{8}$

$(FEM)_{AB} = \frac{Pb^2a}{L^2}$
 $(FEM)_{BA} = \frac{Pa^2b}{L^2}$

$(FEM)_{AB} = \frac{2PL}{9}$
 $(FEM)_{BA} = \frac{2PL}{9}$

$(FEM)_{AB} = \frac{5PL}{16}$
 $(FEM)_{BA} = \frac{5PL}{16}$

$(FEM)'_{AB} = \frac{3PL}{16}$

$(FEM)'_{AB} = \left(\frac{P}{L^2}\right)(b^2a + \frac{a^2b}{2})$

$(FEM)'_{AB} = \frac{PL}{3}$

$(FEM)'_{AB} = \frac{45PL}{96}$

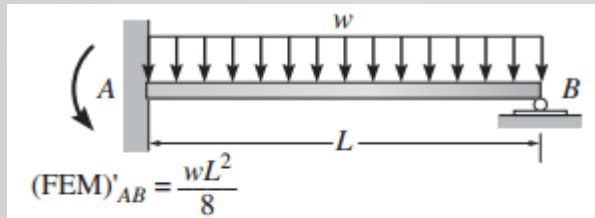
$(FEM)_{AB} = \frac{wL^2}{12}$
 $(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{12}$

$(FEM)_{AB} = \frac{11wL^2}{192}$
 $(FEM)_{BA} = \frac{5wL^2}{192}$

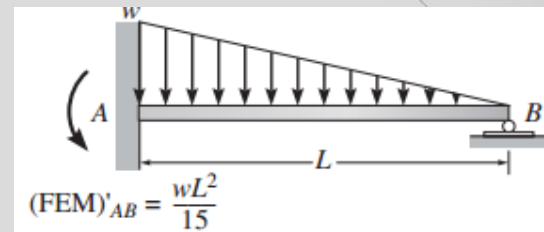
$(FEM)_{AB} = \frac{wL^2}{20}$
 $(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{30}$

$(FEM)_{AB} = \frac{5wL^2}{96}$
 $(FEM)_{BA} = \frac{5wL^2}{96}$

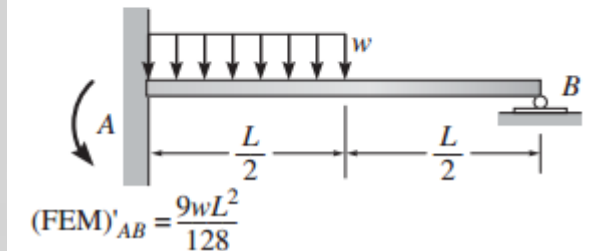
Fixed End Moment



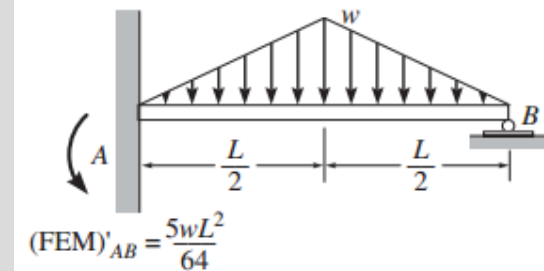
$$(FEM)'_{AB} = \frac{wL^2}{8}$$



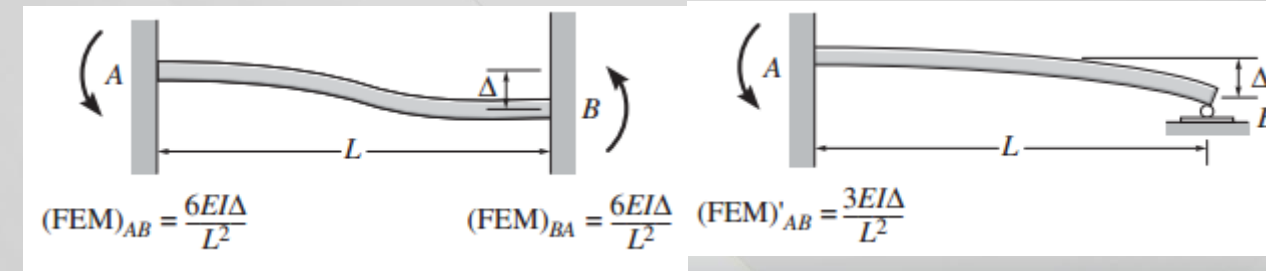
$$(FEM)'_{AB} = \frac{wL^2}{15}$$



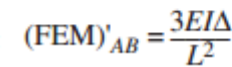
$$(FEM)'_{AB} = \frac{9wL^2}{128}$$



$$(FEM)'_{AB} = \frac{5wL^2}{64}$$



$$(FEM)_{AB} = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad (FEM)_{BA} = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$



$$(FEM)'_{AB} = \frac{3EI\Delta}{L^2}$$

Persamaan Slope-Deflection

- Selanjutnya persamaan-persamaan 1, 2 dan 3 dapat dijumlahkan beserta beban luar yang bekerja, dan dapat dituliskan menjadi :

$$M_{AB} = 2E \left(\frac{I}{L} \right) \left[2\theta_A + \theta_B - 3 \left(\frac{\Delta}{L} \right) \right] + (FEM)_{AB}$$

$$M_{BA} = 2E \left(\frac{I}{L} \right) \left[2\theta_B + \theta_A - 3 \left(\frac{\Delta}{L} \right) \right] + (FEM)_{BA}$$

- Atau secara umum bentuk persamaan slope-deflection adalah :

$$M_N = 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\Psi) + (FEM)_N \quad (4)$$

Persamaan Slope-Deflection

- Dengan :

M_N adalah momen internal pada ujung dekat

E, k adalah modulus elastisitas dan kekakuan balok $k = I/L$

θ_N, θ_F adalah sudut rotasi pada ujung dekat dan ujung jauh, memiliki satuan radian dan bernilai positif apabila memiliki arah sesuai putaran jarum jam

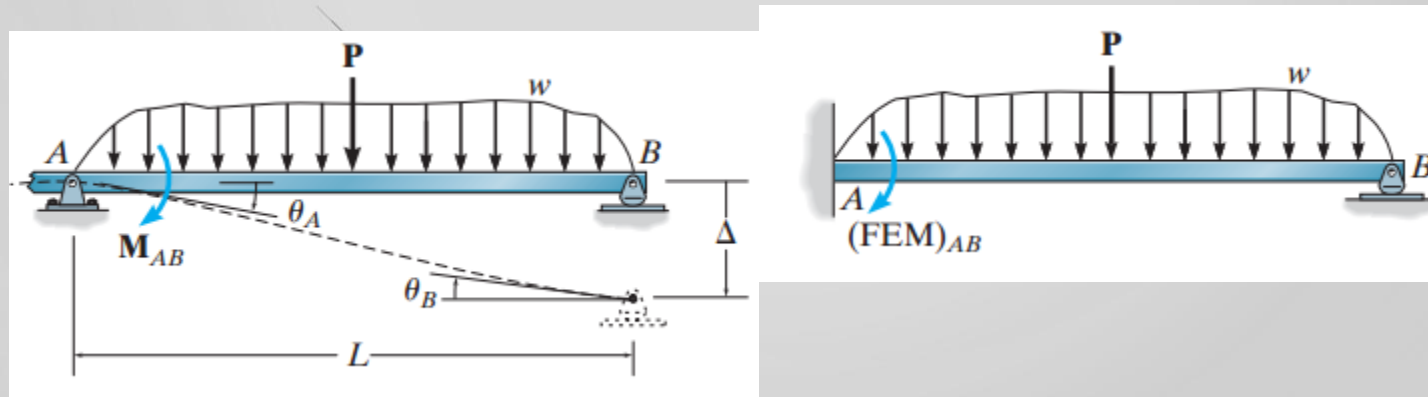
ψ adalah rotasi balok akibat adanya penurunan pada tumpuan, $\psi = \Delta/L$, besaran ini memiliki satuan radian dan bernilai positif apabila searah jarum jam

$(FEM)_N$ adalah Fixed End Moment pada ujung dekat, bernilai positif apabila memiliki arah sesuai putaran jarum jam

Persamaan Slope-Deflection

- Persamaan 4 berlaku apabila ujung-ujung balok terjepit, apabila salah satu ujungnya sendi, maka persamaan slope-deflection menjadi :

$$M_N = 3Ek(\theta_N - \Psi) + (FEM)_N \quad (5)$$



Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

Example Gambarkan diagram gaya lintang dan momen lentur untuk balok pada Gambar, asumsikan EI konstan

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{30} = -\frac{6(6)^2}{30} = -7,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

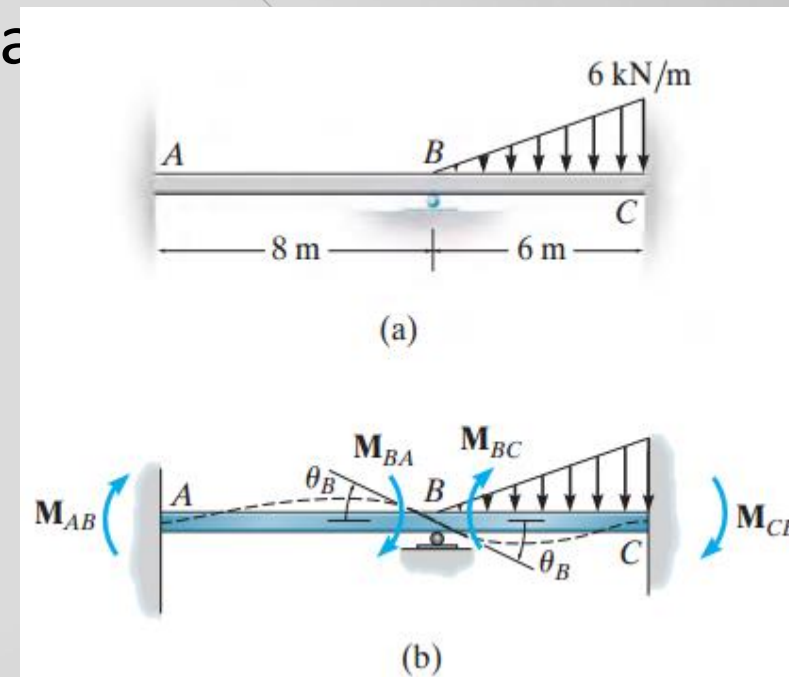
$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{20} = \frac{6(6)^2}{20} = 10,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

dari persamaan slope - deflection

$$M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 0 = \frac{EI}{4}\theta_B$$

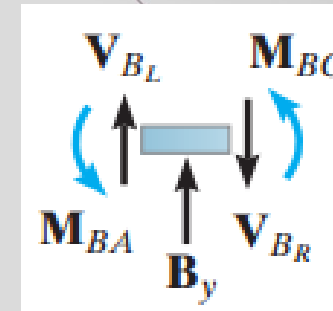
$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 0 = \frac{EI}{2}\theta_B$$



Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] - 7,2 = \frac{2EI}{3}\theta_B - 7,2$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 10,8 = \frac{EI}{3}\theta_B + 10,8$$



Dengan meninjau keseimbangan titik B diperoleh :

$$\Sigma M_B = 0$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

Akhirnya didapatkan $\theta_B = 6,17/EI$

Substitusikan θ_B ke persamaan-persamaan sebelumnya dan diperoleh :

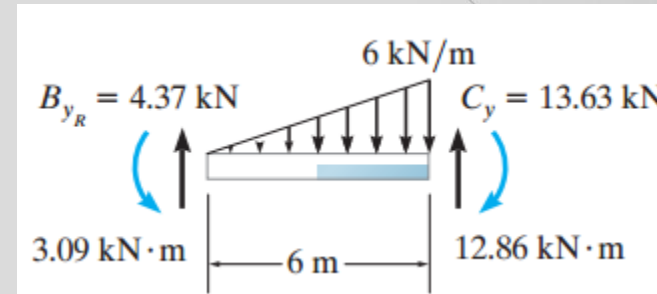
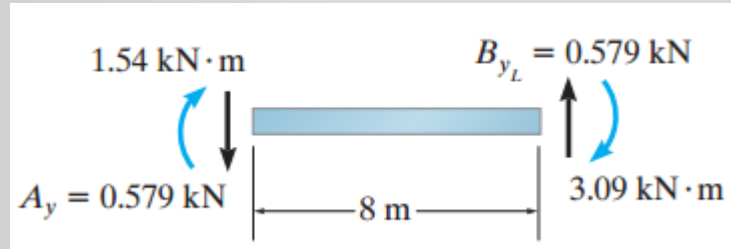
$$M_{AB} = 1,54 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA} = 3,09 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = -3,09 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_{CB} = 12,86 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

Free body diagram :



$$A_y = - (1,54/8) - (3,09/8) = - 0,579 \text{ kN } (\downarrow)$$

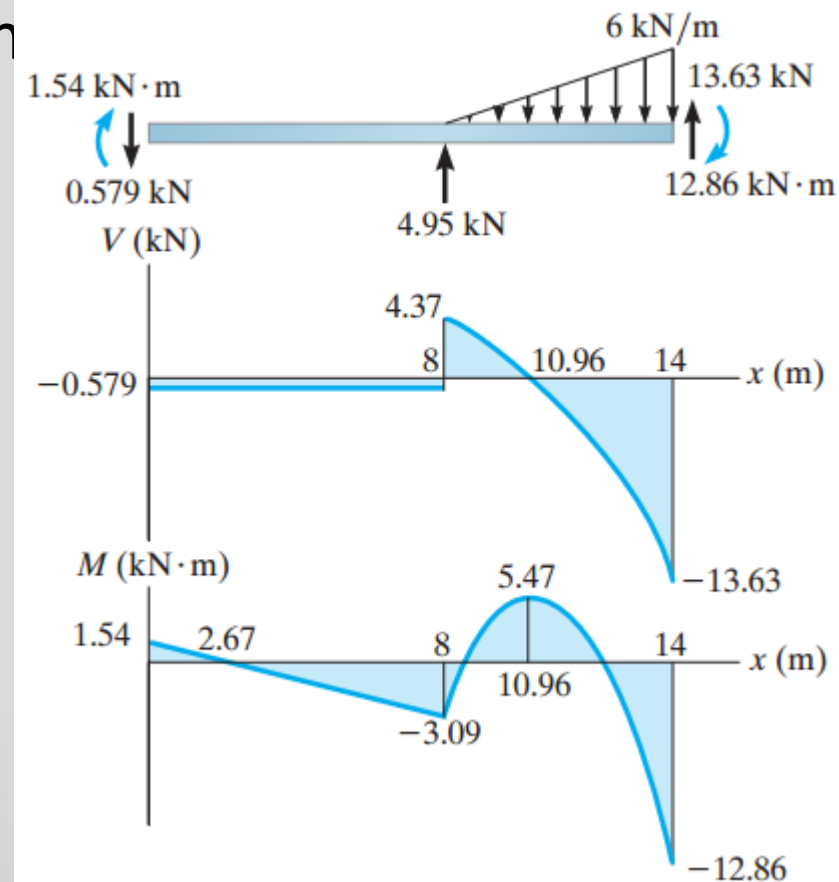
$$B_{yL} = (1,54/8) + (3,09/8) = 0,579 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$B_{yR} = (3,09/6) - (12,86/6) + (0,5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2/6) = 4,37 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$C_y = -(3,09/6) + (12,86/6) + (0,5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4/6) = 13,63 \text{ kN } (\uparrow)$$

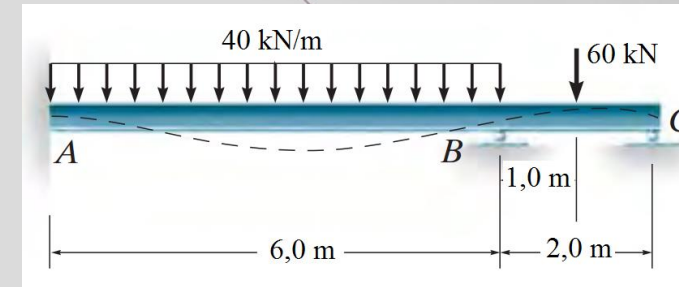
Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

Diagram Gaya Geser dan Momen Lentur



Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

Gambarkan diagram gaya lintang dan momen lentur untuk balok pada Gambar, asumsikan EI konstan



$$(FEM)_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{40(6)^2}{12} = -120 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{12} = \frac{40(6)^2}{12} = 120 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{BC} = -\frac{3PL}{16} = -\frac{3(60)(2)}{16} = -22,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

dari persamaan slope - deflection

$$M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

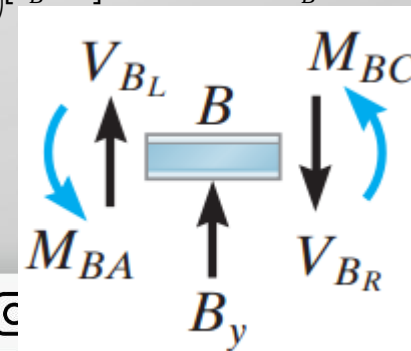
$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] - 120 = 0,3333EI\theta_B - 120$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 120 = 0,667EI\theta_B + 120$$

Untuk balok AC gunakan persamaan slope - deflection

$$M_N = 3E\left(\frac{I}{L}\right)(\theta_N - \psi) + (FEM)_N$$

$$M_{BC} = 3E\left(\frac{I}{2}\right)[\theta_B - 0] - 22,5 = 1,5EI\theta_B - 22,5$$



Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

Dari keseimbangan gaya titik B :

$$\Sigma M_B = 0$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

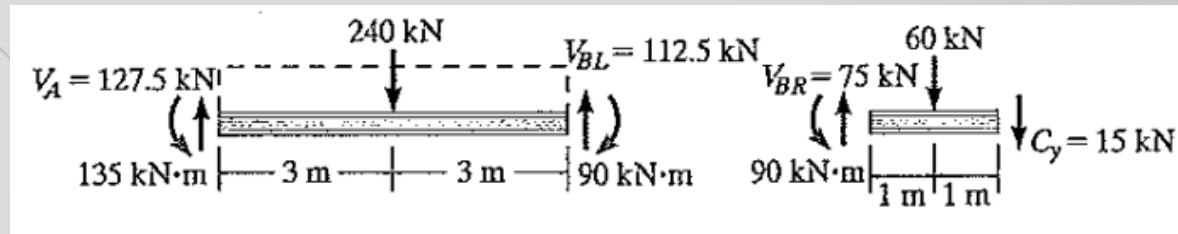
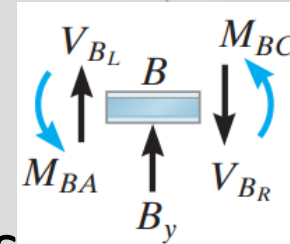
Dan nilai $\theta_B = -144/EI$.

Substitusikan θ_B ke persamaan-persamaan sebelumnya guna mendapatkan :

$$M_{AB} = -135 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA} = 90 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = -90 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

Example 11.3

Tentukan momen di A dan B pada balok, apabila tumpuan B mengalami penurunan sebesar 80 mm. $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 5(10)^6 \text{ mm}^4$

$$\psi_{AB} = \psi_{BA} = \frac{0,08\text{m}}{4} = 0,02\text{rad}$$

$$k_{AB} = \frac{I}{L} = \frac{5(10)^6 \text{ mm}^4 (10^{-12}) \text{ m}^4 / \text{mm}^4}{4\text{m}} = 1,25(10)^{-6} \text{ m}^3$$

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 2(200 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2) [1,25 \cdot 10^{-6}] [2(0) + \theta_B - 3(0,02)] + 0 \\ &= 500.000\theta_B - 30.000 \end{aligned}$$

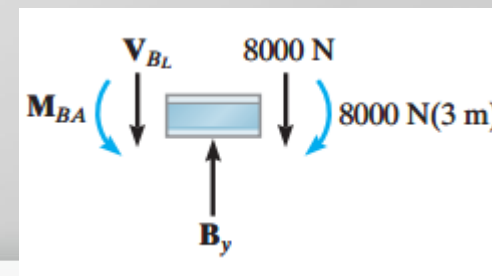
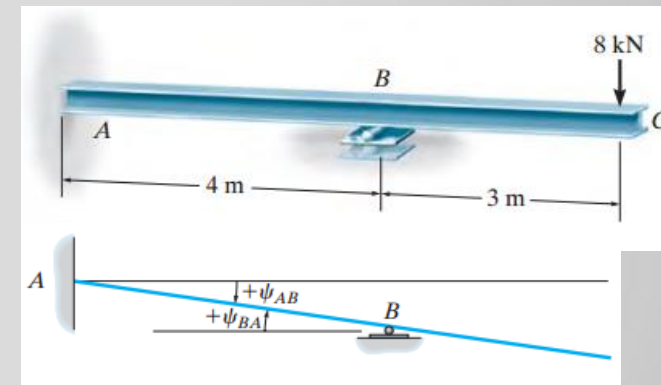
$$M_{BA} = 2(200 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2) [1,25 \cdot 10^{-6}] [2\theta_B + 0 - 3(0,02)] + 0$$

Dari kesetimbangan titik B :

$$\Sigma M_B = 0$$

$$M_{BA} - 8000\text{N}(3\text{m}) = 0$$

$$\theta_B = 0,054 \text{ rad}$$



Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

Example 11.4

Tentukan momen internal pada tumpuan balok apabila tiang
GPa, $I = 600(10)^6 \text{ mm}^4$

$$(FEM)_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{20(7,2)^2}{12} = -86,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

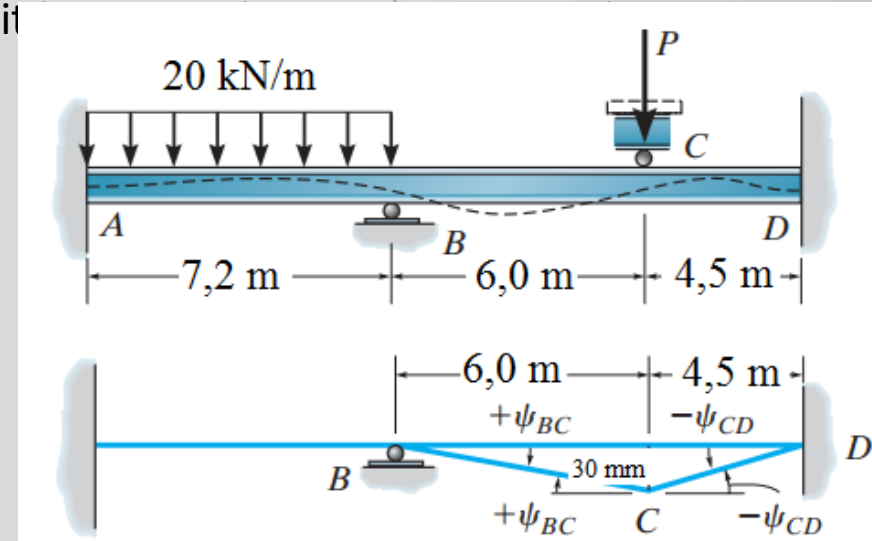
$$(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{12} = \frac{20(7,2)^2}{12} = 86,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\psi_{BC} = \frac{0,03}{6} = 0,005 \text{ rad} \quad \psi_{CD} = -\frac{0,03}{4,5} = -0,00667 \text{ rad}$$

$$k_{AB} = \frac{600 \cdot 10^6 \times 10^{-12}}{7,2} = 83,33(10^{-6}) \text{ m}^3$$

$$k_{BC} = \frac{600 \cdot 10^6 \times 10^{-12}}{6} = 100(10^{-6}) \text{ m}^3$$

$$k_{CD} = \frac{600 \cdot 10^6 \times 10^{-12}}{4,5} = 133,33(10^{-6}) \text{ m}^3$$



Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

Example 11.4

Bentang AB:

$$M_{AB} = 2[200 \cdot 10^6][83,33 \cdot 10^{-6}][2(0) + \theta_B - 3(0)] - 86,4 = 33.333,3\theta_B - 86,4$$

$$M_{BA} = 2[200 \cdot 10^6][83,33 \cdot 10^{-6}][2\theta_B + 0 - 3(0)] + 86,4 = 66.666,7\theta_B + 86,4$$

Bentang BC:

$$M_{BC} = 2[200 \cdot 10^6][100 \cdot 10^{-6}][2\theta_B + \theta_C - 3(0,005)] + 0 = 80.000\theta_B + 40.000\theta_C - 600$$

$$M_{CB} = 2[200 \cdot 10^6][100 \cdot 10^{-6}][2\theta_C + \theta_B - 3(0,005)] + 0 = 80.000\theta_C + 40.000\theta_B - 600$$

Bentang CD:

$$M_{CD} = 2[200 \cdot 10^6][133,33 \cdot 10^{-6}][2\theta_C + 0 - 3(-0,00667)] + 0 = 106.666,7\theta_C + 1066,7$$

$$M_{DC} = 2[200 \cdot 10^6][133,33 \cdot 10^{-6}][2\theta_C + \theta_C - 3(-0,00667)] + 0 = 53.333,3\theta_C + 1066,7$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad M_{CB} + M_{CD} = 0$$



$$\theta_B = 0,00444 \text{ rad} \quad \theta_C = -0,00345 \text{ rad}$$