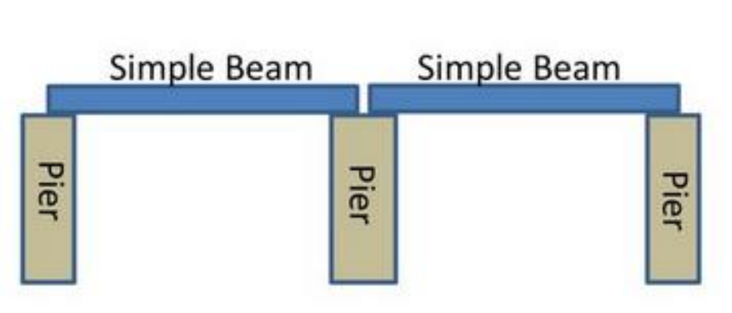
STATIS TAK TENTU
FORCE METHOD (BEAM)

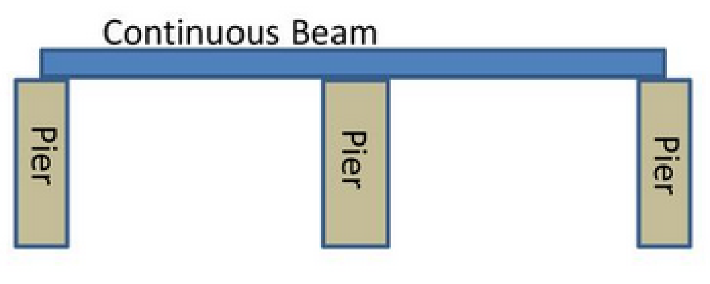
ANALISIS STRUKTUR – TSI204 (3 sks)

Pertemuan 9

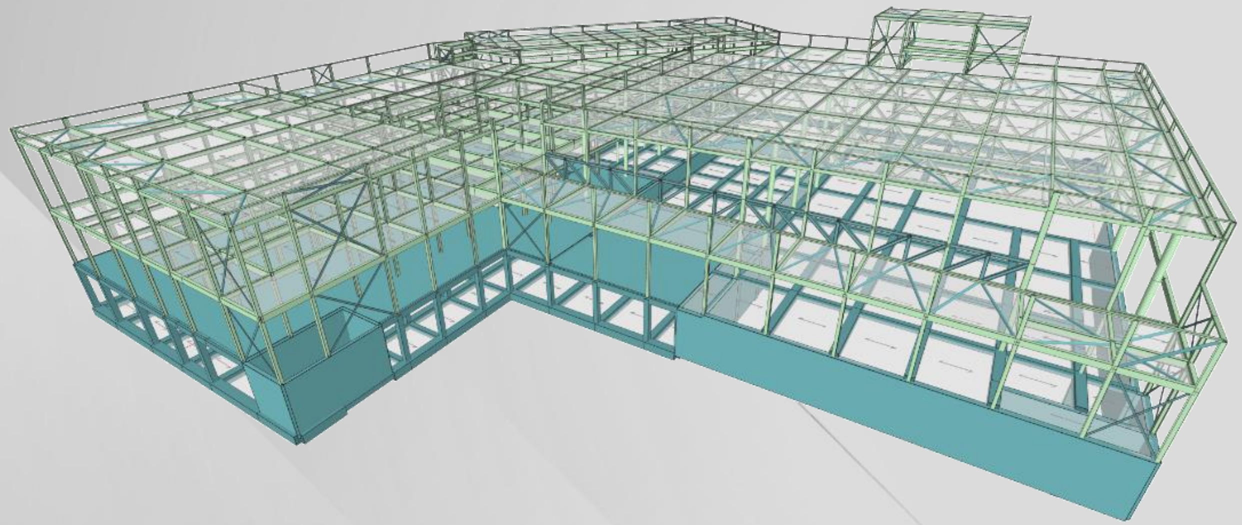
Struktur Statis Tak Tentu

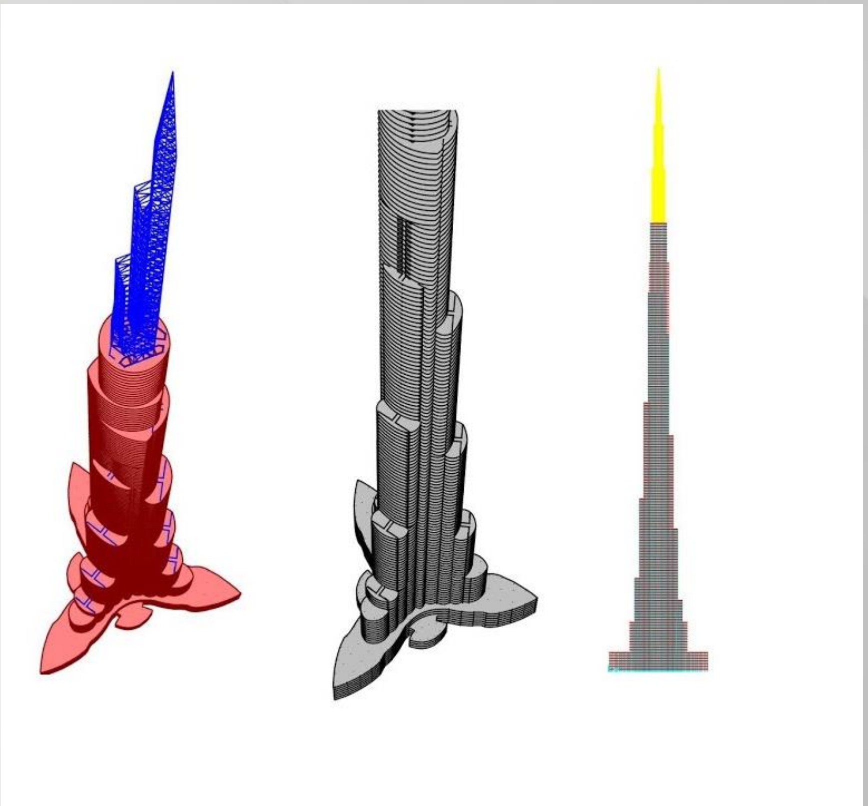
- Sebuah struktur apapun jenisnya dapat diklasifikasikan sebagai struktur statis tak tentu apabila jumlah reaksi tumpuan yang tak diketahui atau gaya-gaya dalamnya melebihi jumlah persamaan kesetimbangan yang tersedia untuk keperluan analisis
- Sebagian besar struktur yang dihasilkan saat ini merupakan struktur statis tak tentu
- Struktur beton hampir selalu merupakan struktur statis tak tentu, karena pada umumnya elemen balok dan kolom dicor secara monolit menjadi satu kesatuan





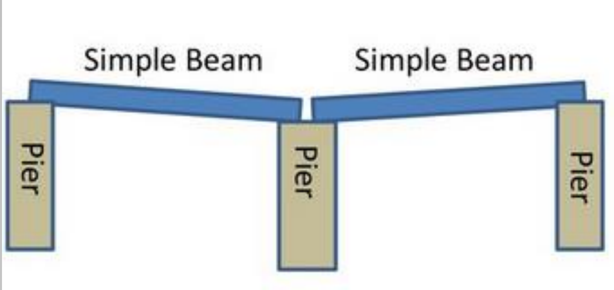
Statis tertentu atau tak tentu?

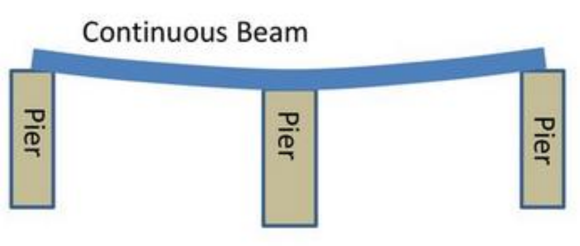




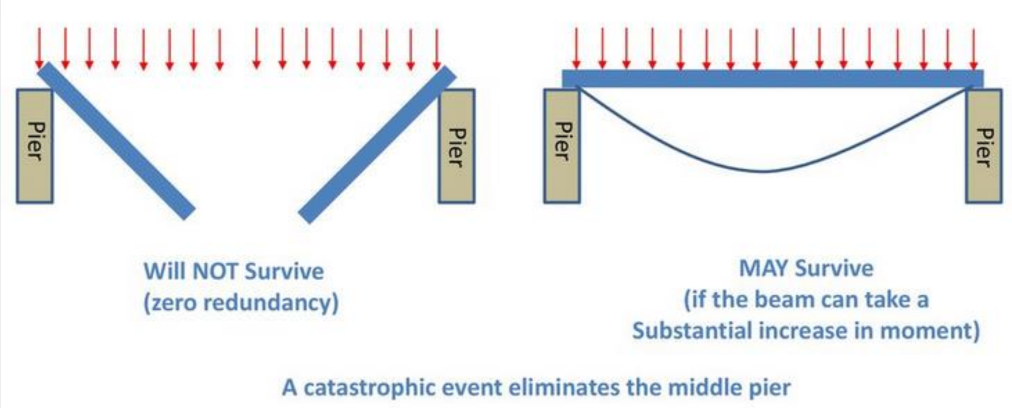
Keuntungan dan Kekurangan Struktur Statis Tak Tentu

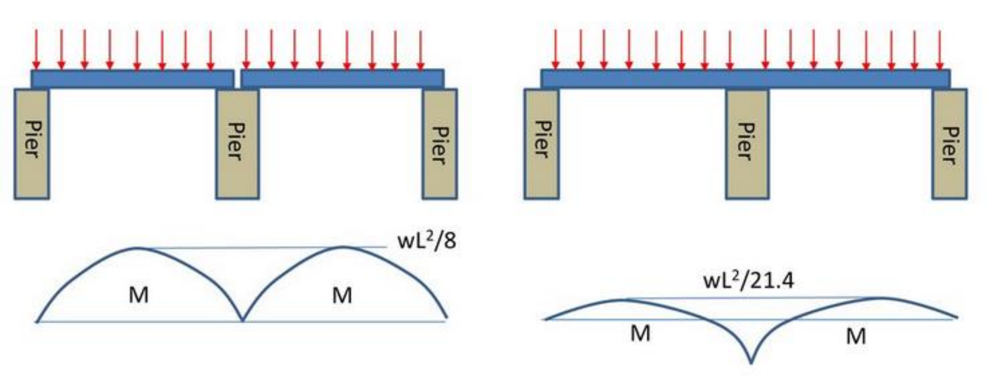
Keuntungan	Kekurangan
Tegangan maksimum dan defleksi lebih kecil daripada struktur statis tertentu	Biaya fabrikasi yang tinggi
Memiliki tendensi untuk redistribusi beban jika terjadi overloading	Ada tegangan tambahan yang harus diperhitungkan akibat deformasi yang disebabkan oleh penurunan tumpuan, perubahan panjang elemen, perubahan temperatur, kesalahan fabrikasi dll.
Dapat memikul beban dengan elemen yang lebih tipis	
Memiliki stabilitas yang lebih baik daripada statis tertentu	



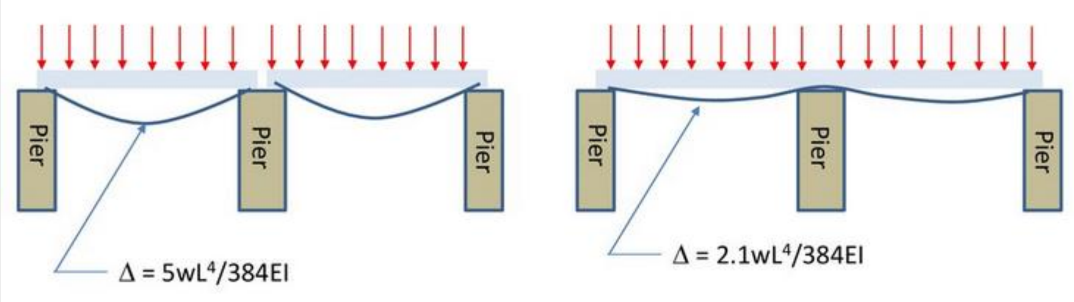


DIFFERENTIAL SETTLEMENT





LOWER STRESS



HIGHER STIFNESS

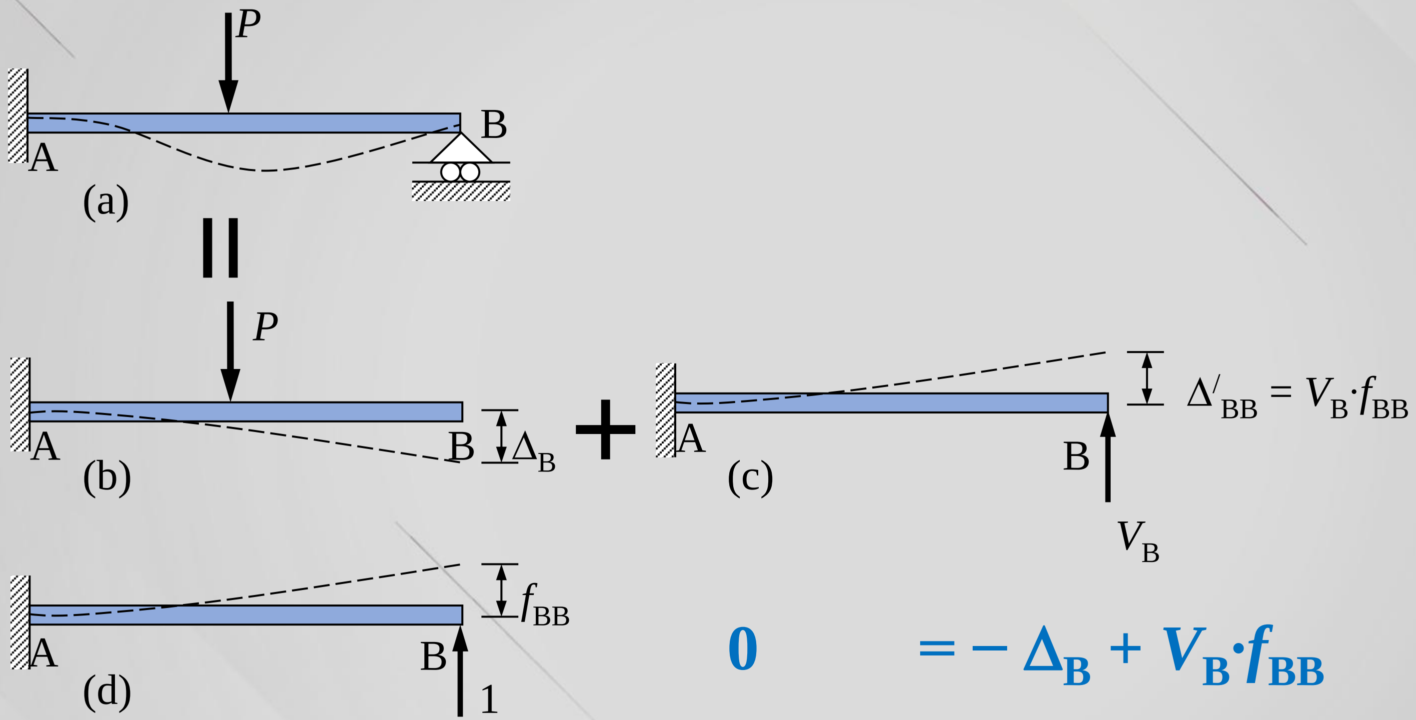
Metode Analisis

Struktur Statis Tak Tentu

Factor	Force /Flexibility Method	Displacement/Stiffness Method
Variabel	Gaya (Force)	Perpindahan (Displacement)
Persamaan Yang Digunakan	Compatibility + Force-Displacement	Equilibrium + Force-Displacement
Koefisien Variabel	Koefisien Fleksibilitas	Koefisien Kekakuan

Metode gaya (Force Method) pada awalnya dikembangkan oleh James Clerk Maxwell pada tahun 1964, dan kemudian disempurnakan oleh Otto Mohr dan Heinrich Müller-Breslau.

Metode Analisis



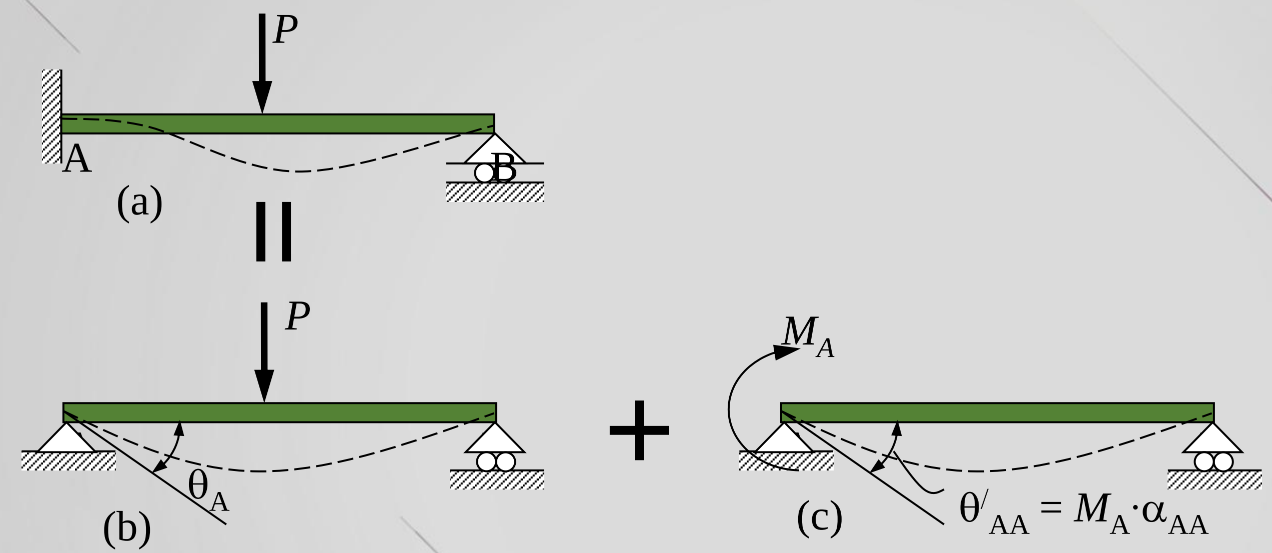
$$0 = -\Delta_B + V_B \cdot f_{BB}$$

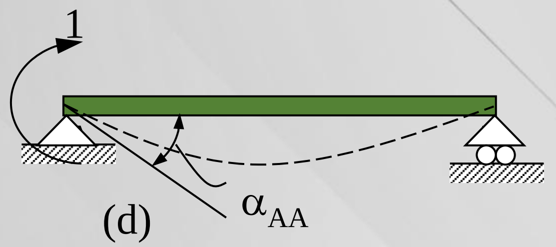
Δ_B dan f_{BB} dapat dihitung nominalnya dengan menggunakan metode – metode yang telah dijelaskan dalam bab-bab terdahulu.

Sehingga reaksi tumpuan V_B dapat dihitung, yaitu $V_B = \Delta_B / f_{BB}$

f_{BB} sering disebut juga sebagai koefisien fleksibilitas

Metode Analisis

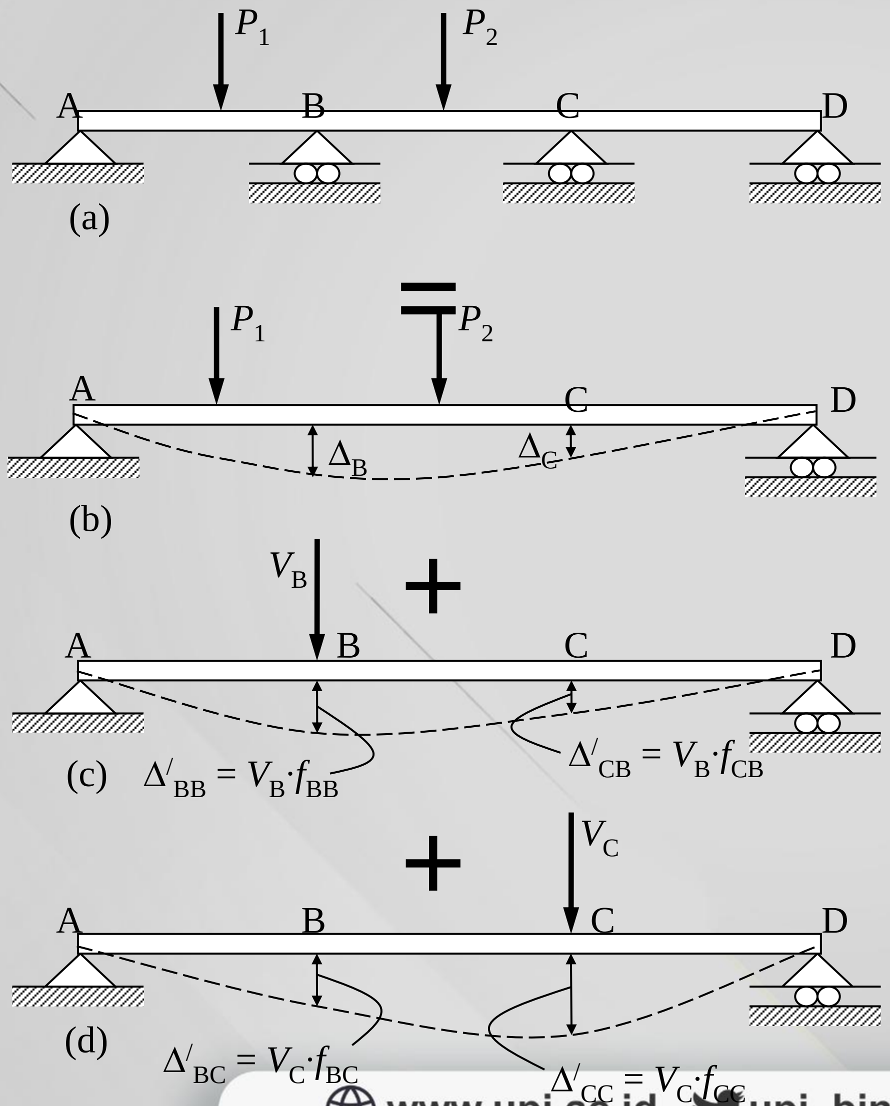




$$\mathbf{0 \quad = \theta_A + M_A \cdot \alpha_{AA}}$$

$M_A = -\,\theta_A / \alpha_{AA}$ bernilai negatif, maka hal tersebut dapat diartikan bahwa M_A memiliki **arah berlawanan** dari momen satu satuan yang diberikan.

Metode Analisis

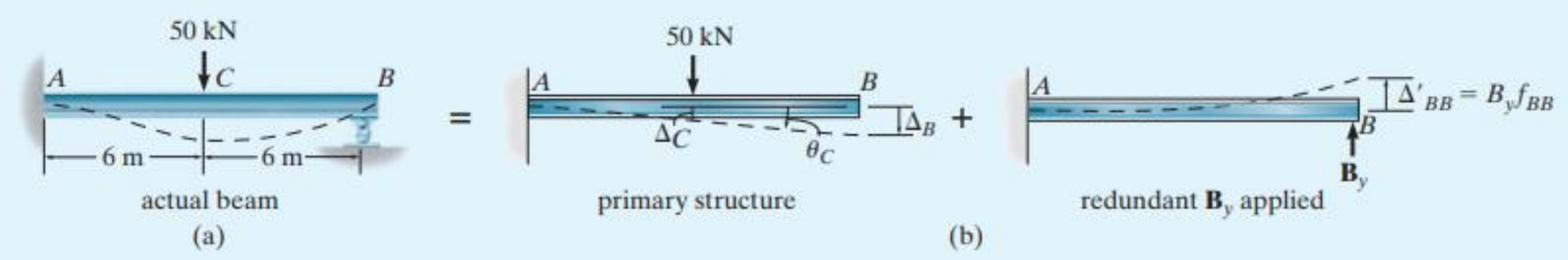


$$0 = \Delta_B + V_B \cdot f_{BB} + V_C \cdot f_{BC}$$

$$0 = \Delta_C + V_B \cdot f_{CB} + V_C \cdot f_{CC}$$

EXAMPLE 9.1

Determine the reaction at the roller support B of the beam shown in Fig. 9–9a. EI is constant.



Determine the reactions at the supports, then draw the moment and shear diagram.
Assume the support at B is a roller. EI is constant.

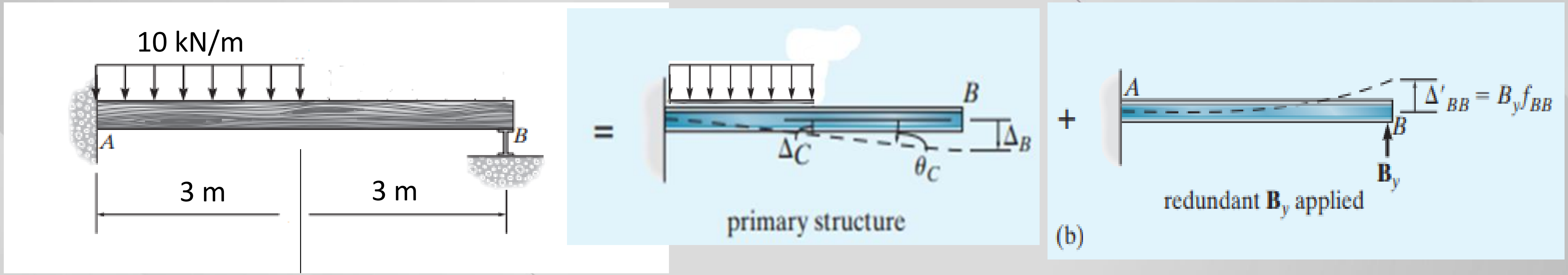
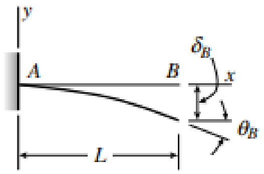


Table H-1

Deflections and Slopes of Cantilever Beams



Notation:

v = deflection in the y direction (positive upward)

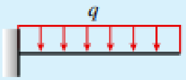
$v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve

$\delta_B = -v(L)$ = deflection at end B of the beam (positive downward)

$\theta_B = -v'(L)$ = angle of rotation at end B of the beam (positive clockwise)

EI = constant

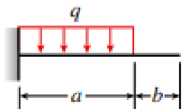
1



$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \qquad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$$

$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$$

2



$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6a^2 - 4ax + x^2) \qquad (0 \le x \le a)$$

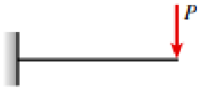
$$v' = -\frac{qx}{6EI}(3a^2 - 3ax + x^2) \qquad (0 \le x \le a)$$

$$v = -\frac{qa^3}{24EI}(4x - a) \qquad v' = -\frac{qa^3}{6EI} \qquad (a \le x \le L)$$

$$\text{At } x = a: v = -\frac{qa^4}{8EI} \qquad v' = -\frac{qa^3}{6EI}$$

$$\delta_B = \frac{qa^3}{24EI}(4L - a) \qquad \theta_B = \frac{qa^3}{6EI}$$

4

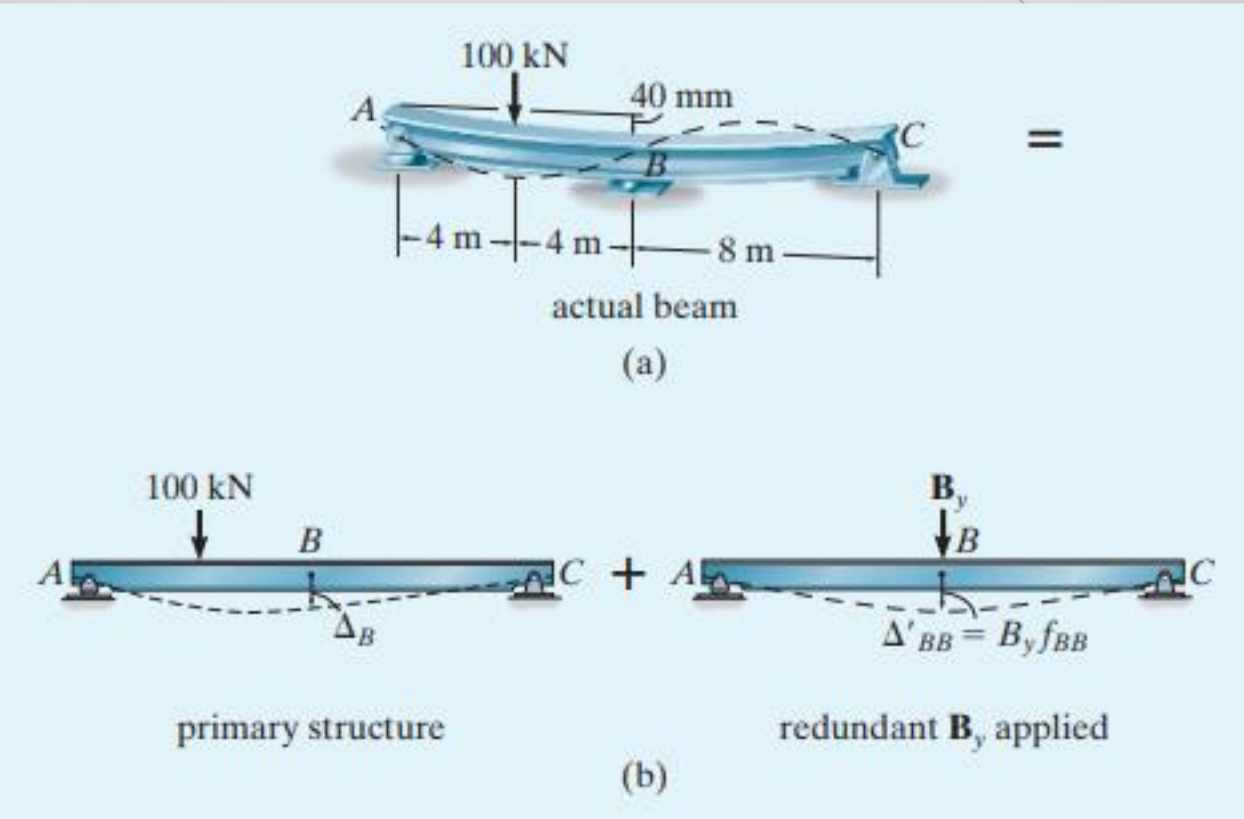


$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \qquad v' = -\frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$$

EXAMPLE 9.2

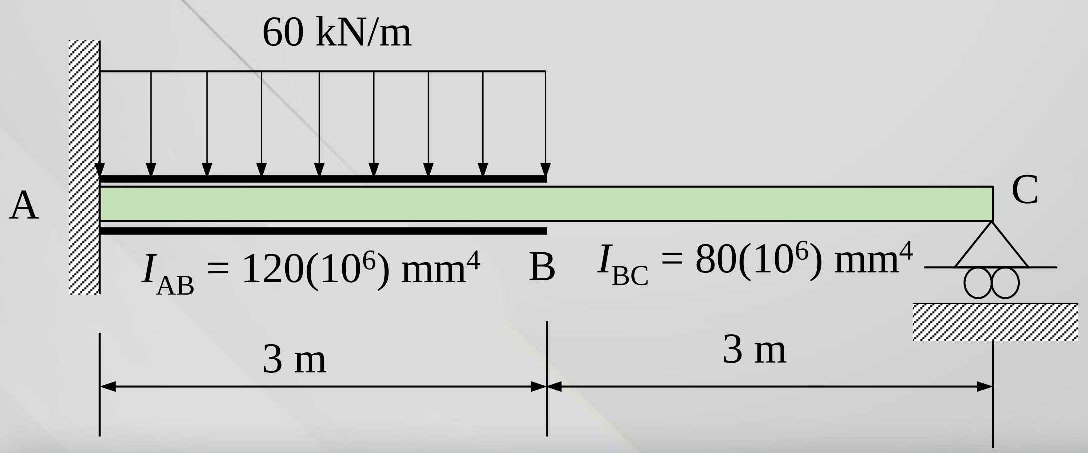
Draw the shear and moment diagrams for the beam shown in Fig. 9–10a. The support at B settles 40 mm. Take E = 200 GPa, I = 500(106) mm4 .



Analisis Balok Statis Tak Tentu

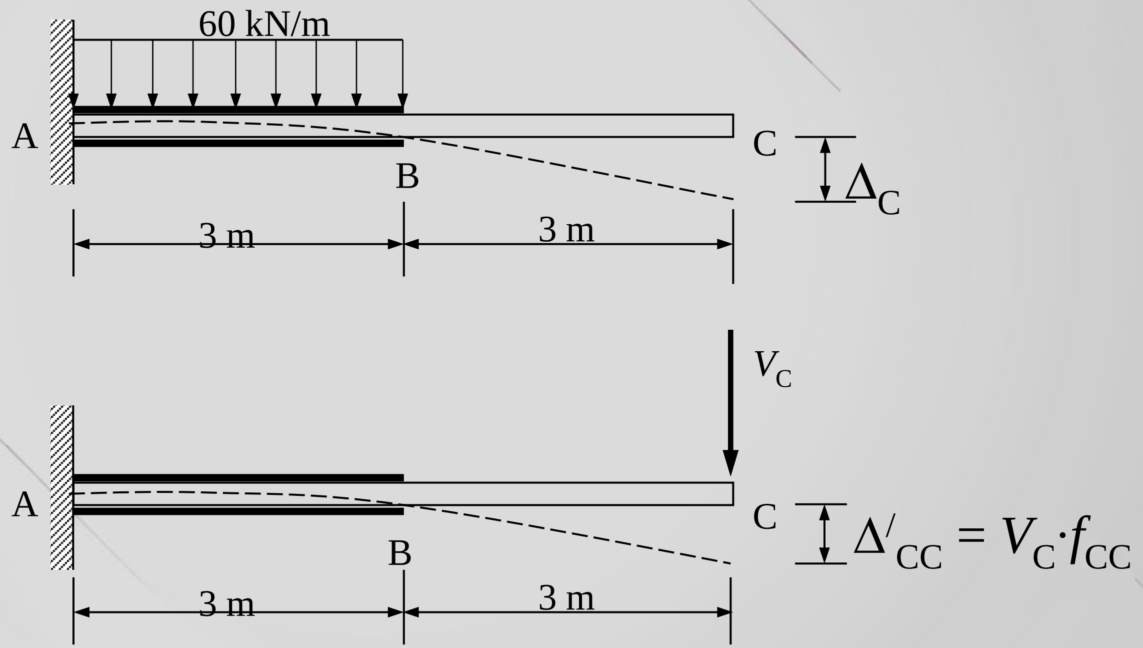
Contoh 8.1

- Hitunglah reaksi pada masing – masing tumpuan dari struktur balok pada Gambar 8.5. Besaran momen inersia tiap segmen ditunjukkan pada gambar. Gambarkan pula diagram gaya lintang dan diagram momen lenturnya.



Contoh 8.1

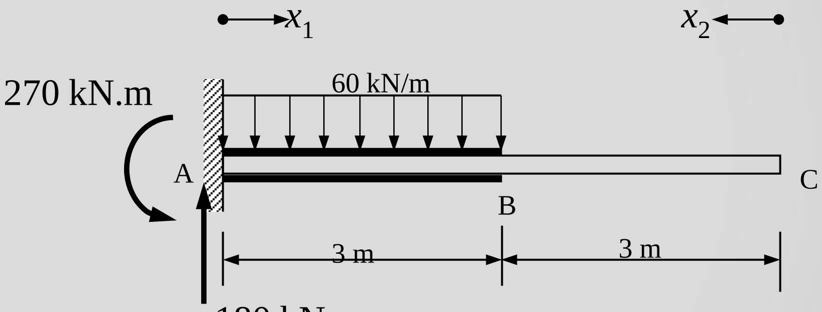
V_C, diambil sebagai reaksi redundan



$$0 = \Delta_C + V_C \cdot f_{CC}$$

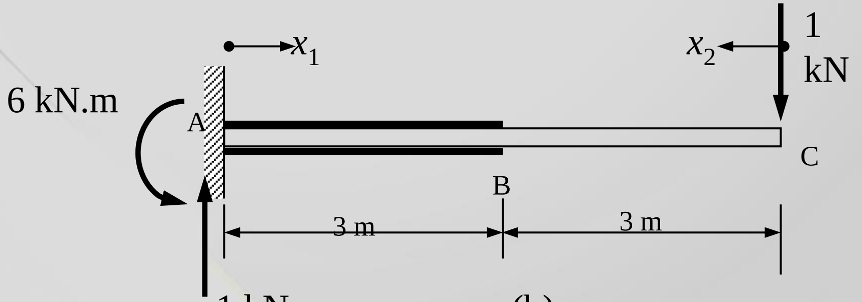
Contoh 8.1

Untuk mencari Δ_C dan f_{CC}, selanjutnya dapat digunakan cara energi seperti yang telah dijelaskan dalam bab sebelumnya.



$$M_1 = -270 + 180 \cdot x_1 - 30 \cdot x_1^2$$
$$M_2 = 0$$

(a)



$$m_1 = -6 + x_1$$
$$m_2 = -x_2$$

(b)

Universitas Pembangunan Jaya

Contoh 8.1

$$\Delta_C = \int \frac{M_1 \cdot m_1}{EI_{AB}} dx_1 + \int \frac{M_2 \cdot m_2}{EI_{BC}} dx_2$$

$$= \int_0^3 \frac{(-270 + 180x_1 - 30x_1^2)(-6 + x_1)}{EI_{AB}} dx_1$$

$$= \int_0^3 \frac{-30x_1^3 + 360x_1^2 - 1350x_1 + 1620}{EI_{AB}} dx_1$$

$$= -\frac{30}{4} x_1^4 + 120x_1^3 - 675x_1^2 + 1620x_1 \Big|_0^3 \times \frac{1}{EI_{AB}} = \frac{1417{,}5}{EI_{AB}}$$

$$f_{CC} = \int \frac{m_1 \cdot m_1}{EI_{AB}} dx_1 + \int \frac{m_2 \cdot m_2}{EI_{BC}} dx_2$$

$$= \int_0^3 \frac{(-6 + x_1)^2}{EI_{AB}} dx_1 + \int_0^3 \frac{(-x_2)^2}{EI_{BC}} dx_2$$

$$= \frac{63}{EI_{AB}} + \frac{9}{EI_{BC}}$$

Karena $I_{BC} = 2/3(I_{AB})$, maka f_{BB} dapat dinyatakan pula dalam EI_{AB} sebagai berikut :

$$\frac{63}{EI_{AB}} + \frac{9}{\frac{2}{3} EI_{AB}} = \frac{153}{2EI_{AB}}$$

Contoh 8.1

Substitusikan nilai Δ_C dan f_{CC} ke dalam persamaan kompatibilitas yang ada.

$$0 = \Delta_C + V_C \cdot f_{CC}$$

$$0 = \frac{1417{,}5}{EI_{AB}} + V_C \frac{153}{2EI_{AB}} \qquad \rightarrow \qquad V_C = -18{,}53 \text{ kN}$$

Nilai V_C menjadi negatif, artinya arah dari V_C berlawanan dengan asumsi semula (arah ke bawah), sehingga didapatkan bahwa $\boldsymbol{V_C = 18{,}53}$ **kN** (↑).

Reaksi tumpuan yang lain dapat dicari dengan menggunakan kesetimbangan gaya :

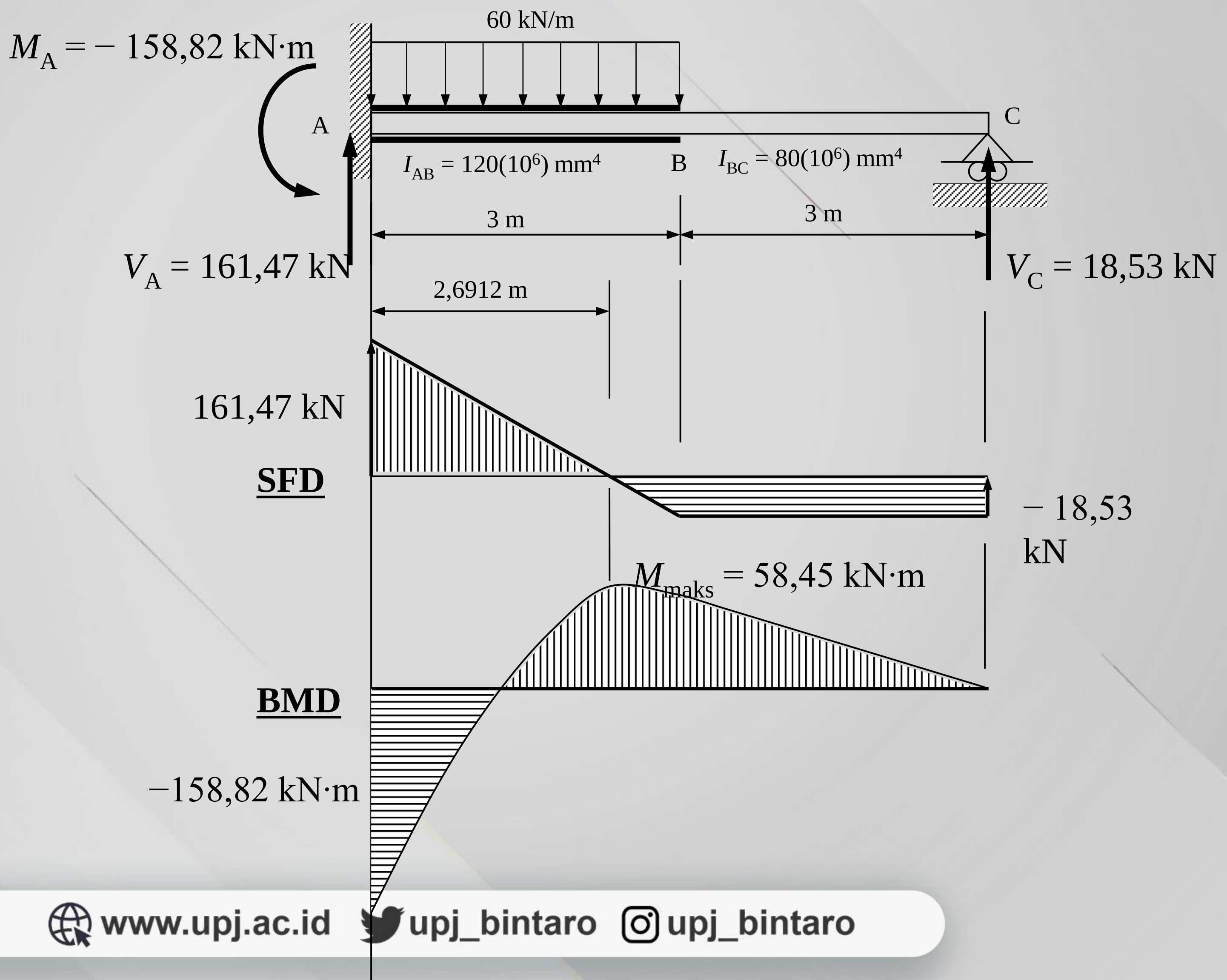
$\Sigma V = 0 \qquad V_A - 60(3) + V_C = 0$

$\qquad V_A = 180 - V_C = 180 - 18{,}53 =$ **161,47 kN** (↑)

$\Sigma M_A = 0 \qquad M_A + 60(3)(1{,}5) - V_C(6) = 0$

$\qquad M_A = V_C(6) - 270 = 18{,}53(6) - 270 =$ **− 158,82 kN·m**

Contoh 8.1



60 kN/m
M_A = − 158,82 kN·m
A
B
C
I_{AB} = 120(10^6) mm^4
I_{BC} = 80(10^6) mm^4
3 m
3 m
V_A = 161,47 kN
V_C = 18,53 kN
2,6912 m
161,47 kN
SFD
− 18,53 kN
M_{maks} = 58,45 kN·m
BMD
−158,82 kN·m

Universitas Pembangunan Jaya

Akreditasi Institusi BAIK SEKALI

Akreditasi A PERPUSTAKAAN Universitas Pembangunan Jaya Nomor : 00127/LAP.PT/XII.2019

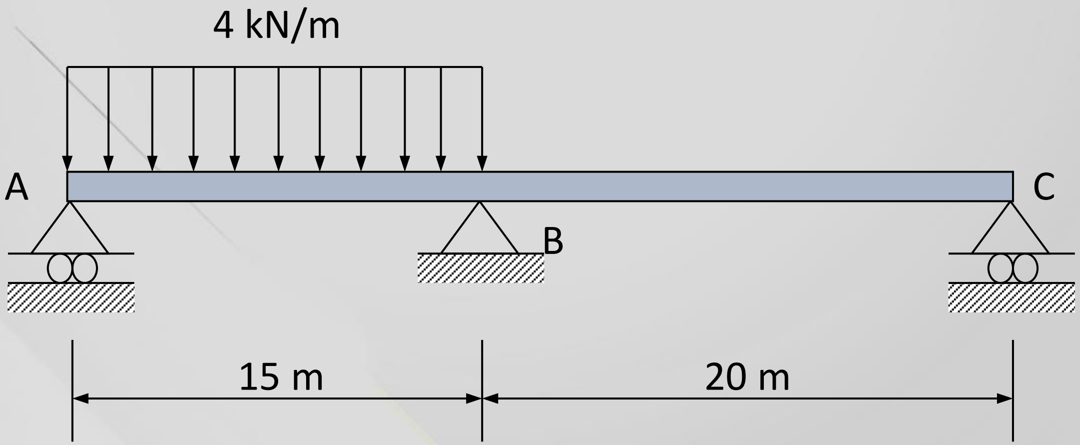
UI GreenMetric World University Rankings

Center for Urban Studies

JCAL Jaya Center For Advanced Learning Universitas Pembangunan Jaya

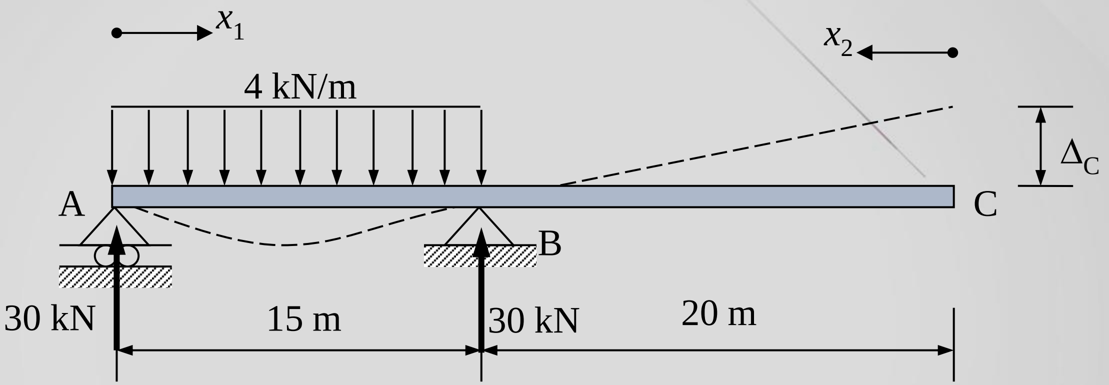
Contoh 8.2

- Hitunglah reaksi tumpuan dari suatu struktur balok dalam Gambar 8.6.a berikut ini. Gambarkan pula diagram gaya lintang serta diagram momen lenturnya. Anggaplah nilai EI adalah konstan pada seluruh batang balok

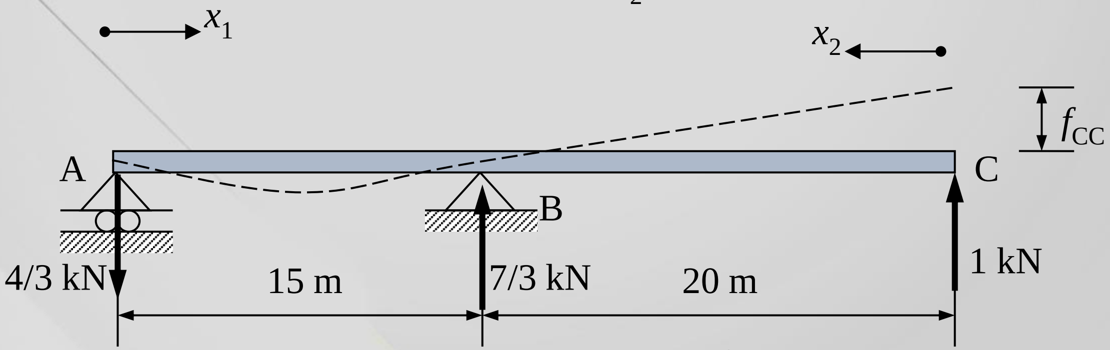


Contoh 8.1

V_C, dipilih sebagai reaksi redundan



$M_1 = 30x_1 - 2x_1^2$
$M_2 = 0$



$m_1 = 4/3 \cdot x_1$
$m_2 = x_2$

$$0 = \Delta_C + V_C \cdot f_{CC}$$

Contoh 8.1

$$\Delta C = \int \frac{M_1 \cdot m_1}{EI} dx_1 + \int \frac{M_2 \cdot m_2}{EI} dx_2$$

$$= \int_0^{15} \frac{(30x_1 - 2x_1^2)(4/3x_1)}{EI} dx_1 = \int_0^{15} \frac{40x_1^2 - 8/3x_1^3}{EI} dx_1$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{40}{3}x_1^3 - \frac{2}{3}x_1^4 \Big|_0^{15}\right] = \frac{11250}{EI}$$

$$f_{CC} = \int_0^{15} \frac{(4/3x_1)^2}{EI} dx_1 + \int_0^{20} \frac{x_2^2}{EI} dx_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{16}{27}x_1^3 \Big|_0^{15} + \frac{1}{3}x_1^3 \Big|_0^{20}\right] = \frac{14000}{3EI}$$

Selanjutnya Δ_C dan f_{CC} dapat disubstitusikan ke dalam persamaan kompatibilitas :

$$0 = \Delta_C + V_C \cdot f_{CC} = \frac{11250}{EI} + V_C \cdot \frac{14000}{3EI} \quad \rightarrow \quad V_C = -\,2{,}41 \text{ kN}$$

V_C bernilai negatif, artinya, arah V_C berlawanan dengan arah asumsi awal, atau dengan kata lain dapat disebutkan **V_C = 2,41 kN** (↓).

Contoh 8.1

Reaksi tumpuan yang lainnya dicari dengan menggunakan persamaan kesetimbangan sebagai berikut :

$\Sigma M_B = 0$ $\quad V_A(15) - 60(7{,}5) + V_C(20) = 0$

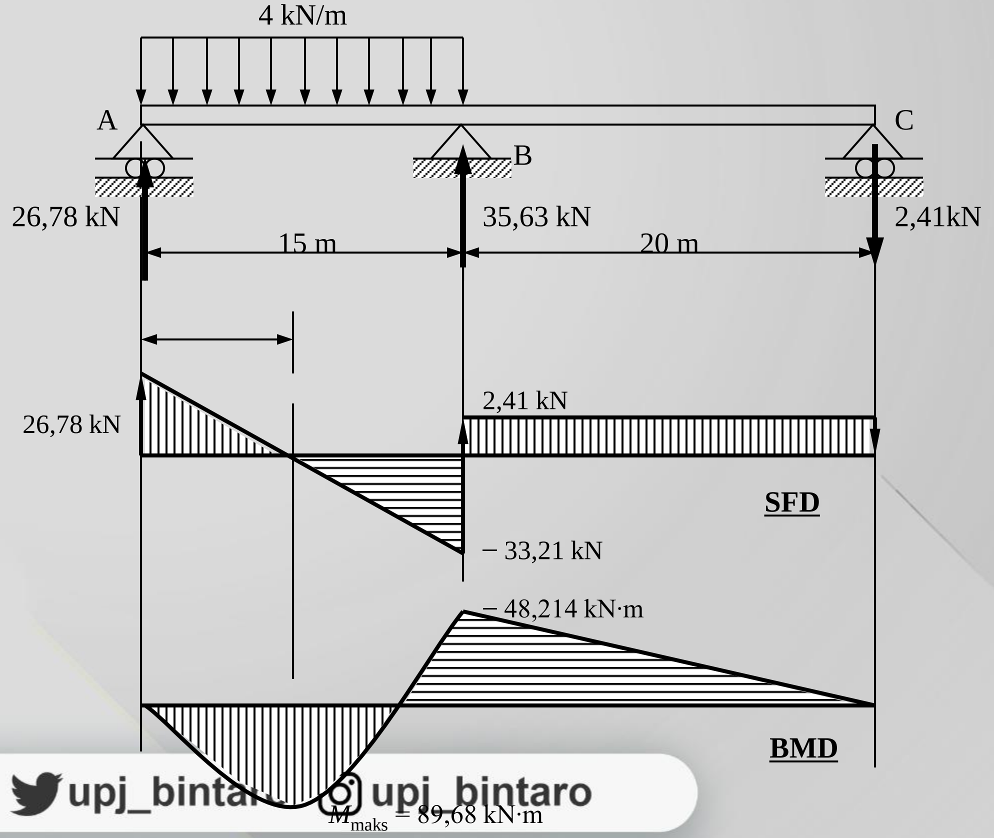
$V_A(15) = 450 - 2{,}41(20)$

$\mathbf{V_A = 26{,}78\ kN}$ (↑)

$\Sigma V = 0$ $\quad V_A + V_B + V_C - 4(15) = 0$

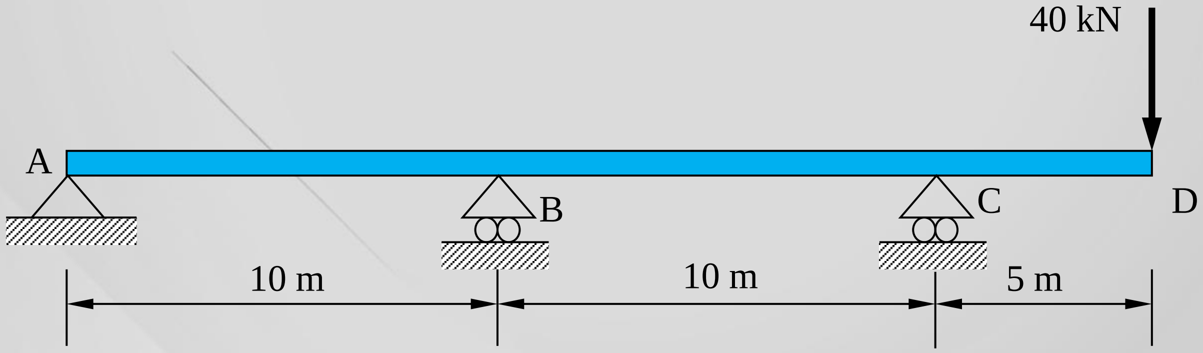
$26{,}78 + V_B - 2{,}41 - 60 = 0$

$\mathbf{V_B = 35{,}63\ kN}$ (↑)



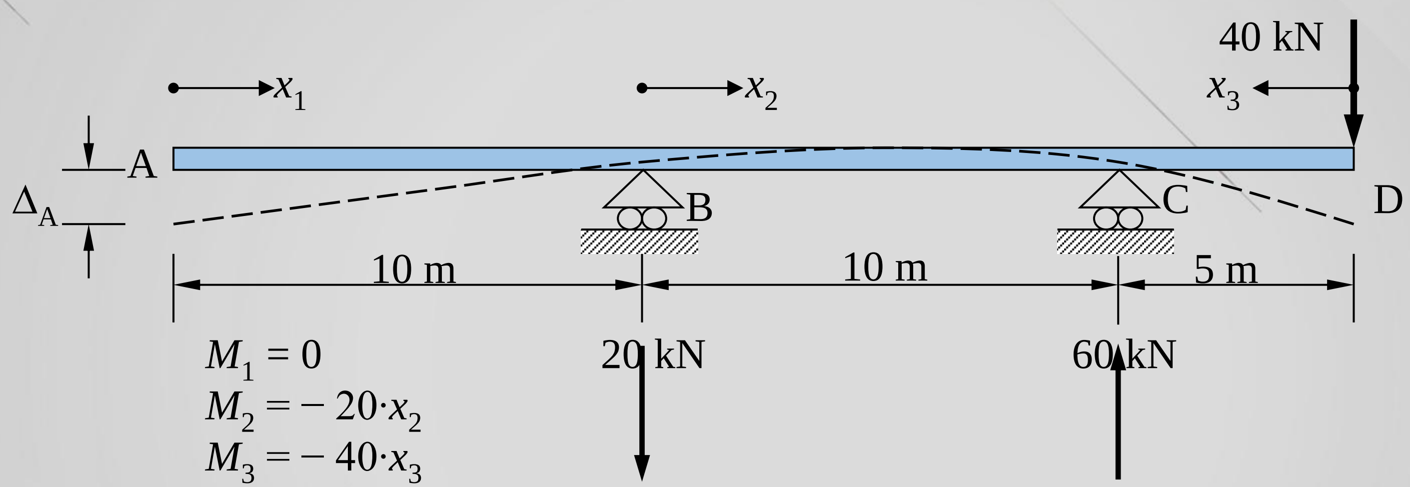
Contoh 8.3

- Hitunglah besarnya reaksi tumpuan dari struktur balok menerus pada Gambar 8.7.a di bawah ini, dengan menganggap nilai E = 200 GPa dan I = $90(10^6)$ mm^4. Diketahui pula bahwa tumpuan sendi di A mengalami perpindahan ke atas sebesar 30 mm.

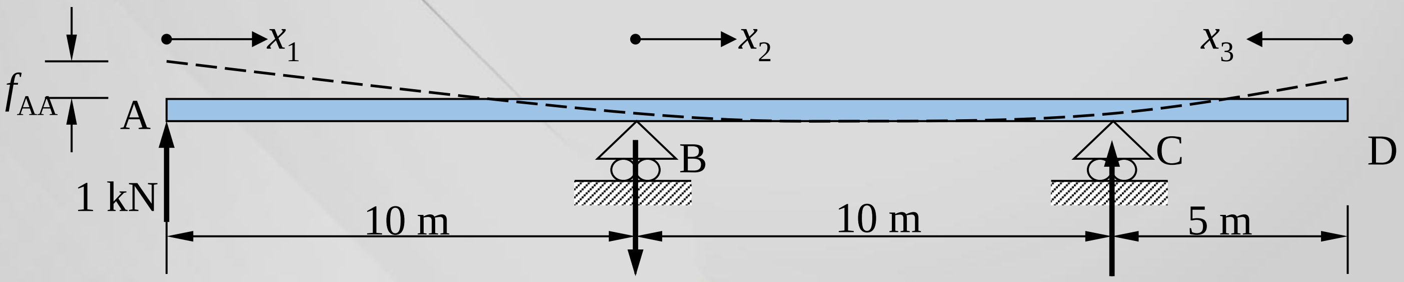


Contoh 8.3

V_A, dipilih sebagai reaksi redundan.



$M_1 = 0$
$M_2 = -20 \cdot x_2$
$M_3 = -40 \cdot x_3$



$m_1 = x_1$
$m_2 = 10 - x_2$
$m_3 = 0$

$$0{,}03 = \Delta_A + V_A \cdot f_{AA}$$

Contoh 8.3

V_A, dipilih sebagai reaksi redundan.

$$\Delta_A = \int \frac{M_1 \cdot m_1}{EI} dx_1 + \int \frac{M_2 \cdot m_2}{EI} dx_2 + \int \frac{M_3 \cdot m_3}{EI} dx_3$$

$$= \int_0^{10} \frac{-20 \cdot x_2 (10 - x_2)}{EI} dx_2 = \int_0^{10} \frac{-200 \cdot x_2 + 20 \cdot x_2^{\ 2}}{EI} dx_2 = \left[\frac{-100 \cdot x_2^{\ 2} + \frac{20}{3} x_2^{\ 3}}{EI} \right]_0^{10} = -\frac{10000}{3EI}$$

$$f_{AA} = \int \frac{M_1 \cdot m_1}{EI} dx_1 + \int \frac{M_2 \cdot m_2}{EI} dx_2 + \int \frac{M_3 \cdot m_3}{EI} dx_3$$

$$= \int_0^{10} \frac{x_1^{\ 2}}{EI} dx_1 + \int_0^{10} \frac{(10 - x_2)^2}{EI} dx_2 = \left[\frac{1}{3} \frac{x_1^{\ 3}}{EI} \right]_0^{10} + \left[\frac{100 x_2 - 10 x_2^{\ 2} + \frac{1}{3} x_2^{\ 3}}{EI} \right]_0^{10} = \frac{2000}{3EI}$$

Substitusikan nilai Δ_A dan f_{AA} ke dalam persamaan kompatibilitas :

$$0{,}03 = \Delta_A + V_A \cdot f_{AA}$$

$$0{,}03 = -\frac{10000}{3EI} + V_A \frac{2000}{3EI}$$

Contoh 8.3

V_A, dipilih sebagai reaksi redundan.

$$\Delta_A = \int \frac{M_1 \cdot m_1}{EI} dx_1 + \int \frac{M_2 \cdot m_2}{EI} dx_2 + \int \frac{M_3 \cdot m_3}{EI} dx_3$$

$$= \int_0^{10} \frac{-20 \cdot x_2 (10 - x_2)}{EI} dx_2 = \int_0^{10} \frac{-200 \cdot x_2 + 20 \cdot x_2^{\ 2}}{EI} dx_2 = \left[\frac{-100 \cdot x_2^{\ 2} + \frac{20}{3} x_2^{\ 3}}{EI} \right]_0^{10} = -\frac{10000}{3EI}$$

$$f_{AA} = \int \frac{M_1 \cdot m_1}{EI} dx_1 + \int \frac{M_2 \cdot m_2}{EI} dx_2 + \int \frac{M_3 \cdot m_3}{EI} dx_3$$

$$= \int_0^{10} \frac{x_1^{\ 2}}{EI} dx_1 + \int_0^{10} \frac{(10 - x_2)^2}{EI} dx_2 = \left[\frac{1}{3} \frac{x_1^{\ 3}}{EI} \right]_0^{10} + \left[\frac{100 x_2 - 10 x_2^{\ 2} + \frac{1}{3} x_2^{\ 3}}{EI} \right]_0^{10} = \frac{2000}{3EI}$$

Substitusikan nilai Δ_A dan f_{AA} ke dalam persamaan kompatibilitas :

$$0{,}03 = \Delta_A + V_A \cdot f_{AA}$$

$$0{,}03 = -\frac{10000}{3EI} + V_A \frac{2000}{3EI}$$

Mengingat bahwa E = 200 GPa dan I = 90(10^6) mm^4, maka diperoleh **V_A = 5,81 kN** (↑), dan reaksi tumpuan di titik B serta titik C dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan kesetimbangan sebagai berikut :

$\Sigma M_B = 0$ $\quad V_A(10) - V_C(10) + 40(15) = 0$

$5{,}81(10) - V_C(10) + 600 = 0$

$\mathbf{V_C = 65{,}81}$ **kN** (↑)

$\Sigma V = 0$ $\quad V_A + V_B + V_C - 40 = 0$

$5{,}81 + V_B + 65{,}81 - 40 = 0$

$\mathbf{V_B = 22{,}38}$ **kN** (↑)