

LENDUTAN BALOK METODE UNIT LOAD (BEAM)

ANALISIS STRUKTUR – TSI204 (3 sks)

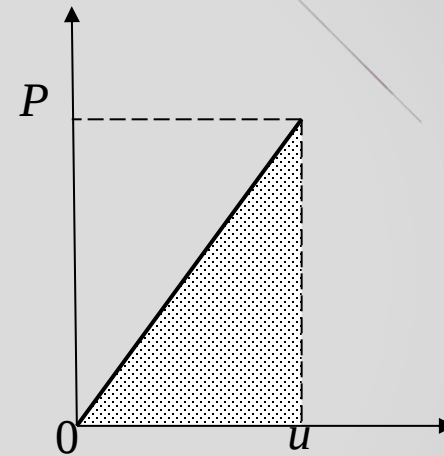
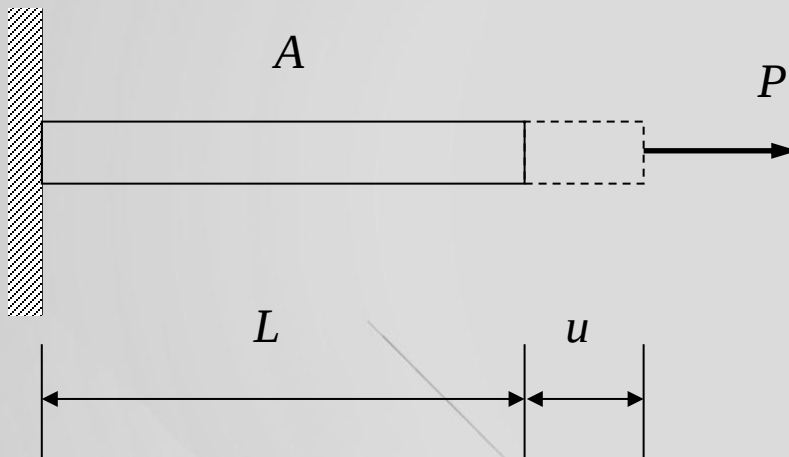
Pertemuan 4



- Metode energi didasarkan pada prinsip konservasi energi, yang menyatakan bahwa **kerja dari beban luar** yang timbul pada suatu struktur (dinotasikan sebagai W_e), adalah sama dengan **kerja dalam atau energi regangan**, U_i , yang timbul pada saat struktur mengalami deformasi.
- Secara matematis, prinsip konservasi energi dapat dituliskan sebagai :

$$W_e = U_i$$

ENERGI REGANGAN



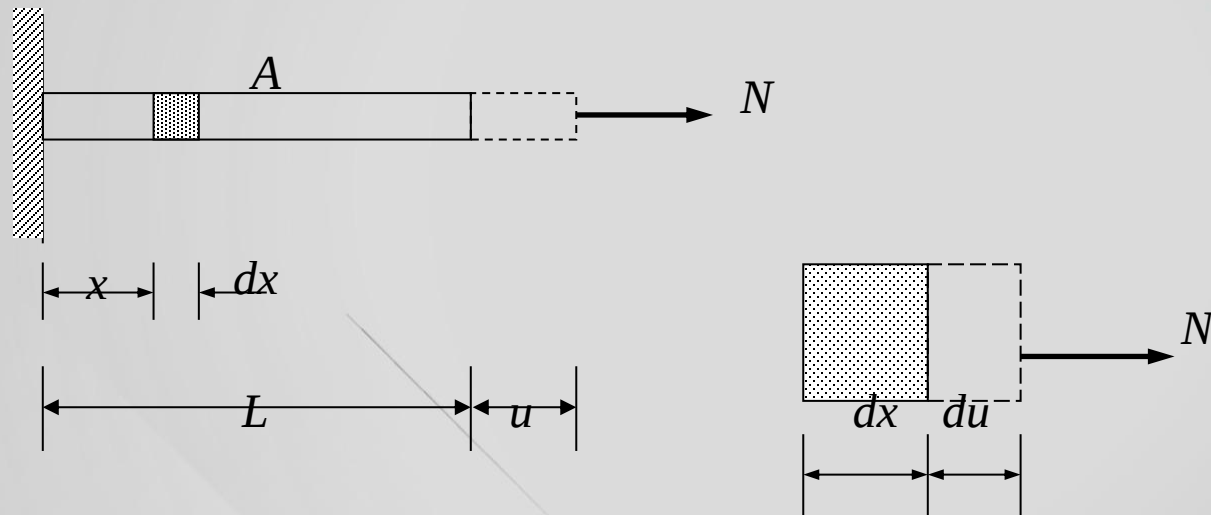
$$W_e = \frac{1}{2} \times P \times u$$

$$U_i = \frac{1}{2} \times P \times u$$



ENERGI REGANGAN

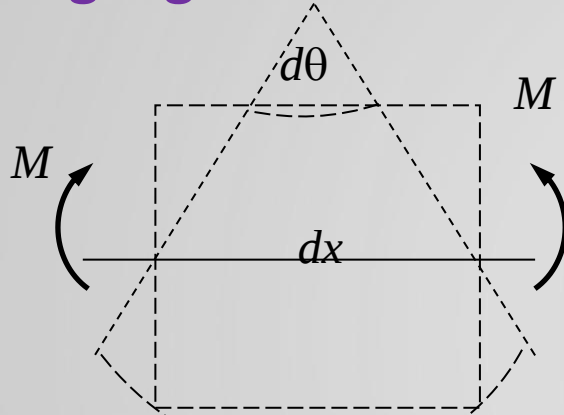
Energi Regangan Akibat Beban Aksial



$$U = \int_0^L \frac{N^2}{2AE} dx \quad (6.6)$$

ENERGI REGANGAN

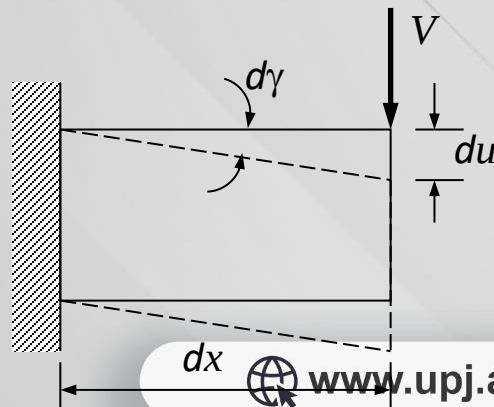
Energi Regangan Akibat Momen Lentur



$$d\theta = \frac{1}{R} dx = \frac{M}{EI} dx$$

$$dU = \frac{1}{2} M \cdot d\theta \quad dU = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx \quad \longrightarrow \quad U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

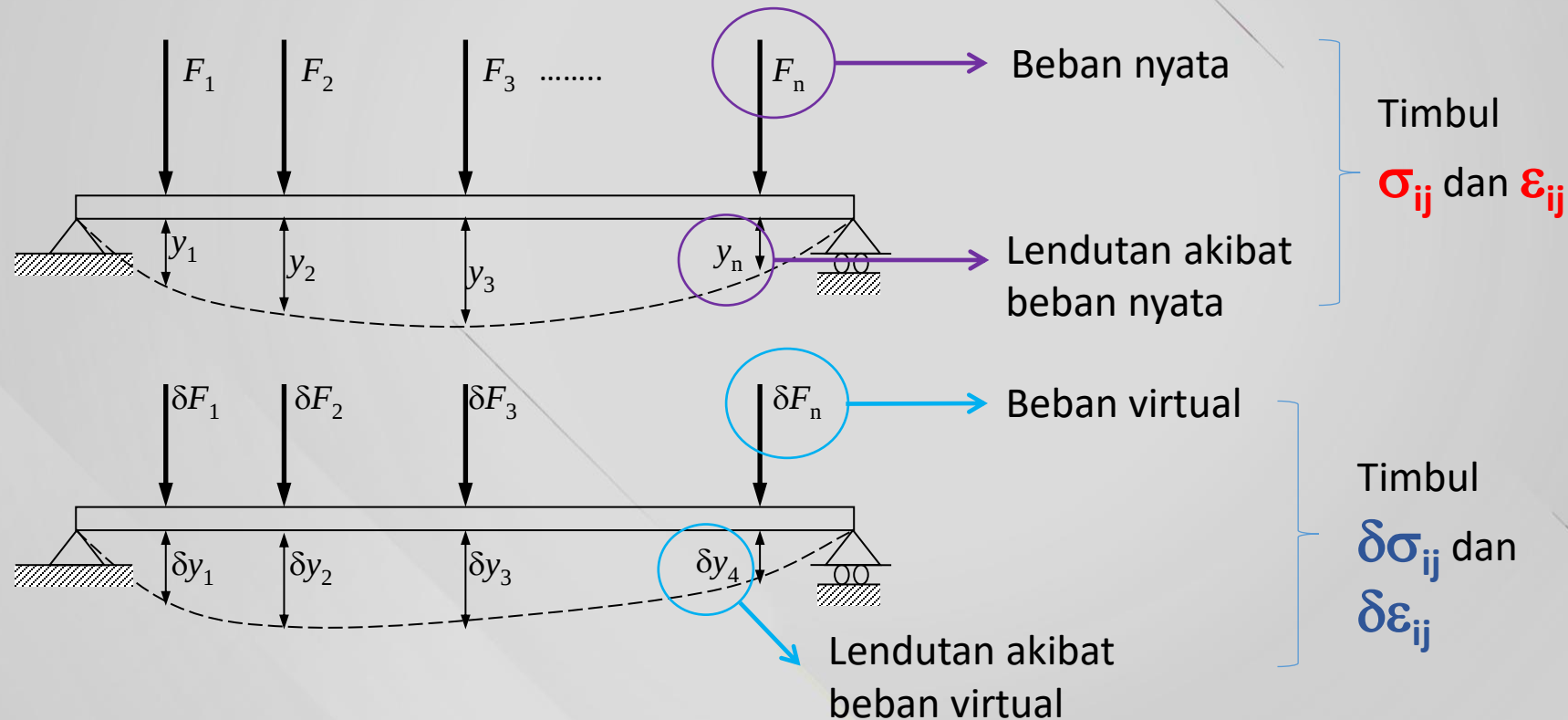
Energi Regangan Akibat Gaya Geser



$$U = \frac{1}{2} V \cdot u = \int_0^L \frac{k \cdot V^2}{2AG} dx$$



PRINSIP KERJA VIRTUAL



PRINSIP KERJA VIRTUAL

Secara umum dinyatakan bahwa suatu elemen badan bebas berada dalam kesetimbangan apabila :

$$\sum F_i \cdot \delta y_i = \int \sigma_{ij} \cdot \delta \epsilon_{ij} dv$$

Secara analogi dapat dinyatakan pula :

$$\sum \delta F_i \cdot y_i = \int \delta \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij} dv$$

dengan $\delta \sigma_{ij}$ adalah tegangan virtual akibat beban virtual δF_i , dan ϵ_{ij} adalah regangan nyata akibat lendutan nyata

y_i .

PRINSIP KERJA VIRTUAL

- Dalam analisis pada umumnya besar beban virtual diambil sama dengan 1 (satu) satuan, sehingga umum disebut pula sebagai metode beban satuan (*unit load*). Secara sederhana persamaan dalam metode kerja virtual dapat dituliskan dalam bentuk umum

$$1 \cdot y = \sum f \cdot dL$$

dengan :

- 1 adalah beban virtual eksternal 1 (satu) satuan dalam arah Δ
- y adalah lendutan eksternal yang diakibatkan oleh beban nyata eksternal
- f adalah beban virtual internal
- dL adalah deformasi internal yang disebabkan oleh beban nyata

PRINSIP KERJA VIRTUAL

- Apabila dikehendaki untuk menentukan sudut rotasi di suatu titik dari elemen struktur, maka pada titik tersebut dapat diberi momen virtual yang besarnya adalah 1 (satu) satuan. Sebagai konsekuensi, momen virtual ini akan menimbulkan beban virtual f_θ . Selanjutnya persamaan 6.25 dapat dituliskan pula dalam bentuk :

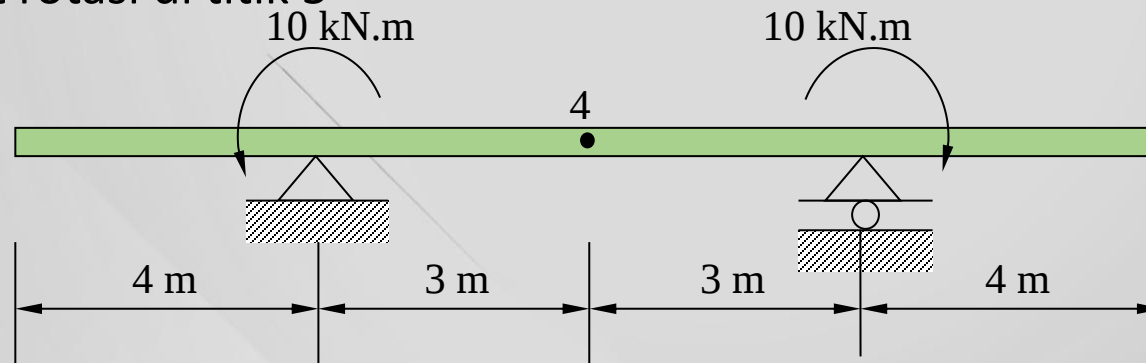
$$1 \cdot \theta = \sum f_\theta \cdot dL$$

dengan :

- 1 adalah momen virtual eksternal 1 (satu) satuan dalam arah θ
- θ adalah sudut rotasi eksternal akibat beban nyata
- f_θ adalah beban virtual internal
- dL adalah deformasi internal yang disebabkan oleh beban nyata

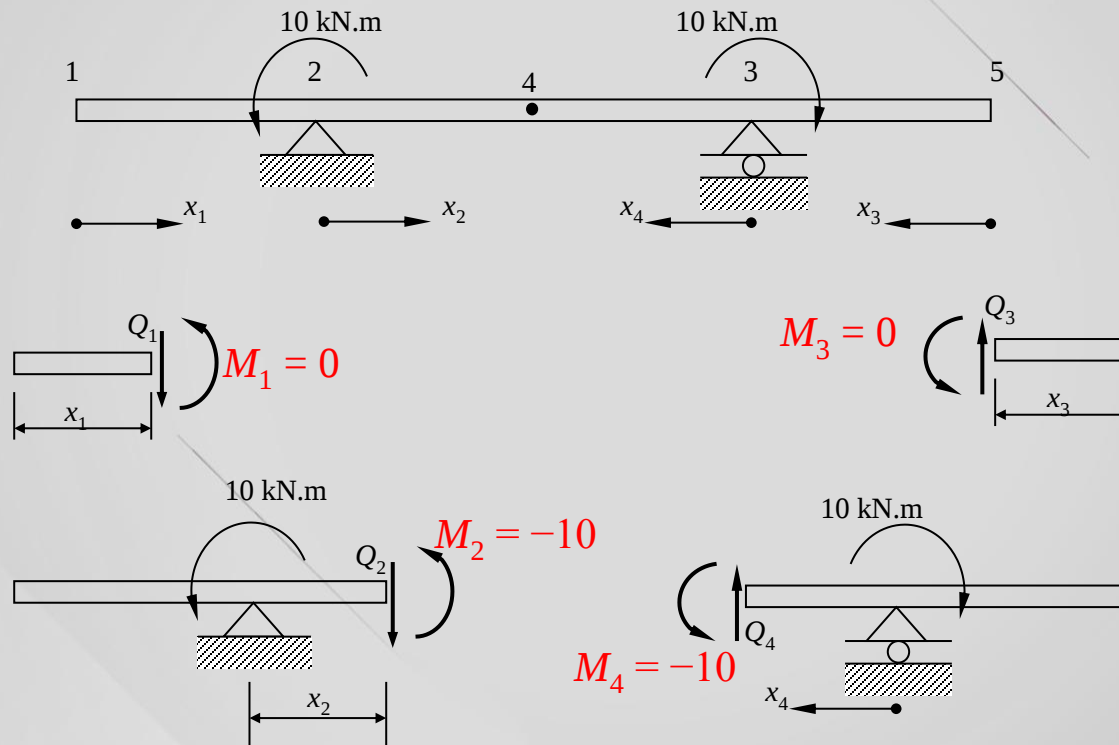
Contoh 6.8

- Suatu struktur balok tertumpu sederhana seperti ditunjukkan dalam Gambar 6.16.a memiliki momen inersia penampang $I = 125(10^6) \text{ mm}^4$ dan Modulus Elastisitas, $E = 200 \text{ GPa}$. Dengan menggunakan metode kerja virtual, tentukan :
 - Besar lendutan di titik 4
 - Besar sudut rotasi di titik 5



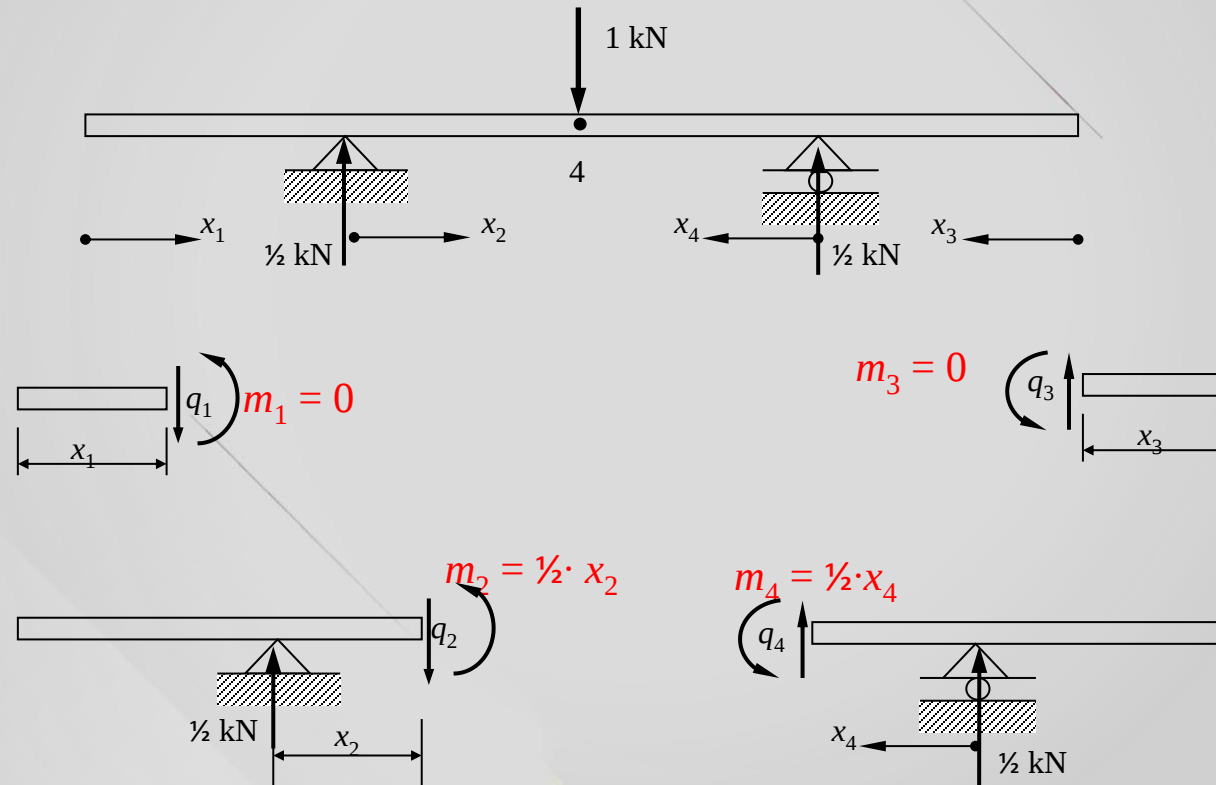
Contoh 6.8

- Mencari lendutan di titik 4



Momen akibat beban nyata, M

- Mencari lendutan di titik 4



Momen virtual, m



Contoh 6.8

Persamaan kerja virtual.

$$\begin{aligned} 1 \cdot y_{4v} &= \int_0^3 \frac{(0,5 \cdot x_2)(-10)}{EI} dx_2 + \int_0^3 \frac{(0,5 \cdot x_4)(-10)}{EI} dx_4 \\ &= -\frac{45}{2EI} - \frac{45}{2EI} = -\frac{45}{EI} \text{ kN.m}^3 \end{aligned}$$

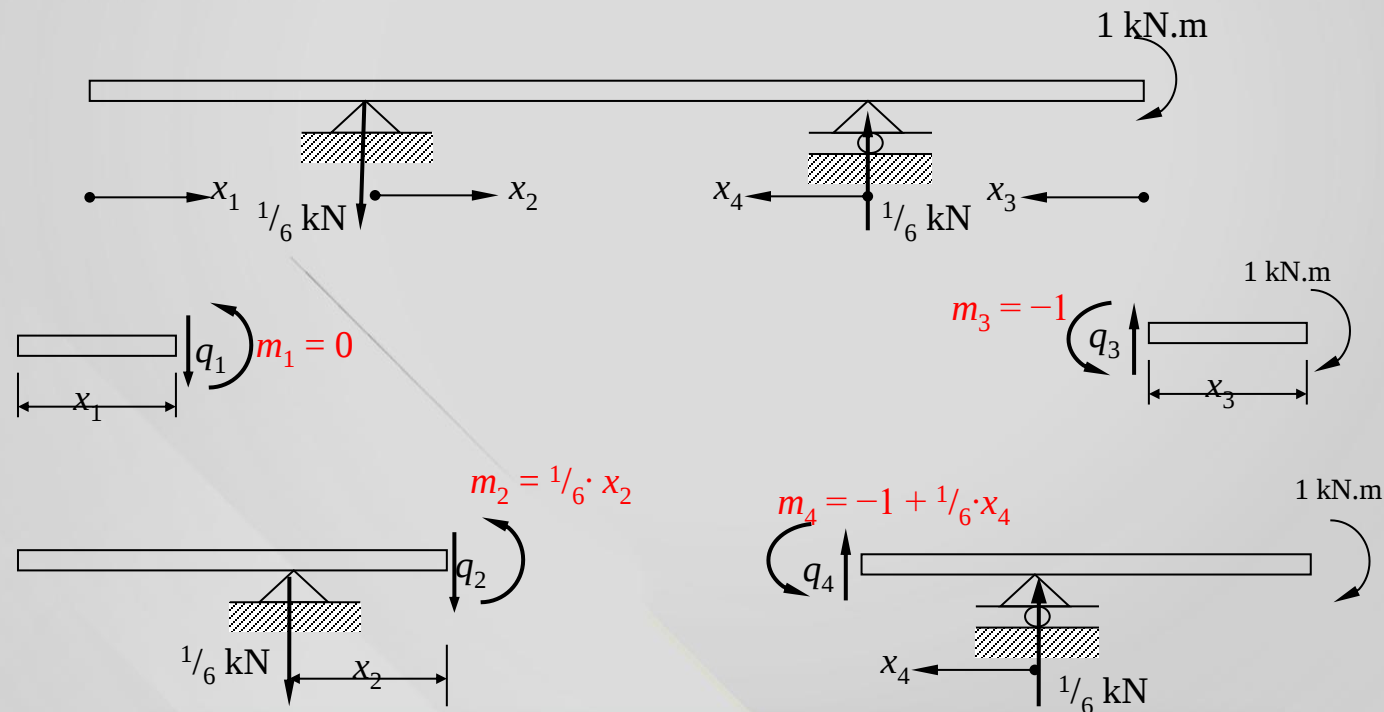
$$\begin{aligned} y_{4v} &= -\frac{45 \text{ kN.m}^3}{\left(200 \cdot \frac{10^6 \text{ kN}}{\text{m}^2}\right)(125(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4)} \\ &= -0,0018 \text{ m} = -\mathbf{1,8 \text{ mm}} \end{aligned}$$

Tanda negatif menunjukkan bahwa lendutan yang terjadi berarah ke atas (berkebalikan dengan arah beban 1 kN yang diberikan sebelumnya).

Contoh 6.8

- Mencari sudut rotasi di titik 5

Guna mencari sudut rotasi pada titik 5, maka berikan momen virtual 1 satuan di titik 5.



Contoh 6.8

- Mencari sudut rotasi di titik 5

Persamaan kerja virtual. Dari persamaan kerja virtual (persamaan 6.31), maka akan diperoleh :

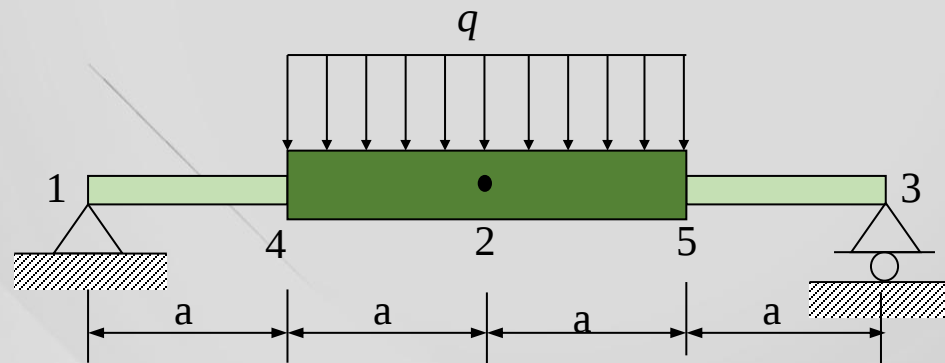
$$\begin{aligned} 1 \cdot \theta_5 &= \int_0^3 \frac{(-1/6 \cdot x_2)(-10)}{EI} dx_2 + \int_0^3 \frac{(-1 + 1/6 \cdot x_4)(-10)}{EI} dx_4 \\ &= \frac{45}{6EI} + \frac{30}{EI} - \frac{45}{6EI} = \frac{30}{EI} \text{ kN.m}^2 \end{aligned}$$

Substitusikan nilai E dan I yang diketahui, sehingga diperoleh besaran sudut rotasi di titik 5

$$\theta_5 = \frac{30 \text{ kN.m}^2}{(200 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2)(125(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4)} = \mathbf{0,0012 \text{ radian}}$$

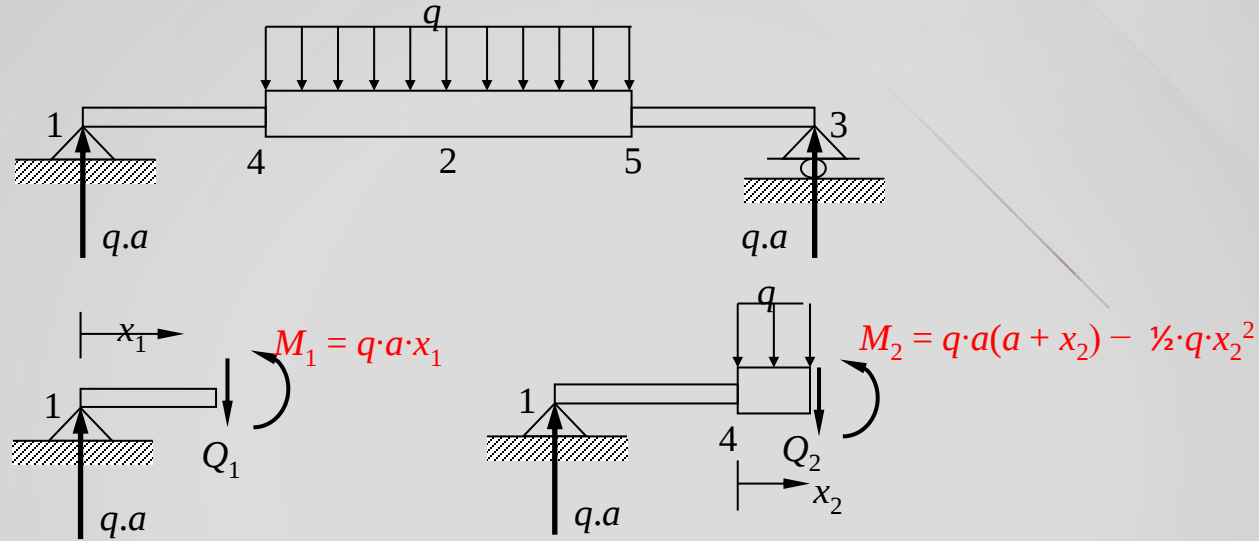
Contoh 6.9

- Gunakan metode kerja virtual untuk menentukan besarnya lendutan di titik 2. Perhatikan bahwa besaran momen inersia untuk segmen 4-5 adalah $2I$, sedangkan segmen 1-4 dan 5-3 memiliki momen inersia penampang sebesar I . Asumsikan struktur memiliki modulus elastisitas yang seragam yaitu E . (Gambar 6.17.a).

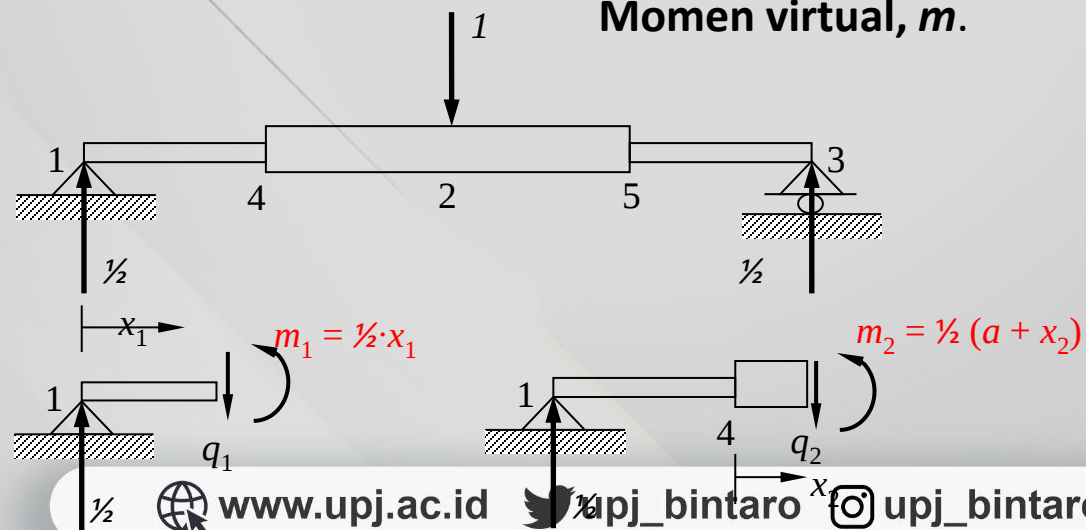


Contoh 6.9

Momen akibat beban nyata, M .



Momen virtual, m .



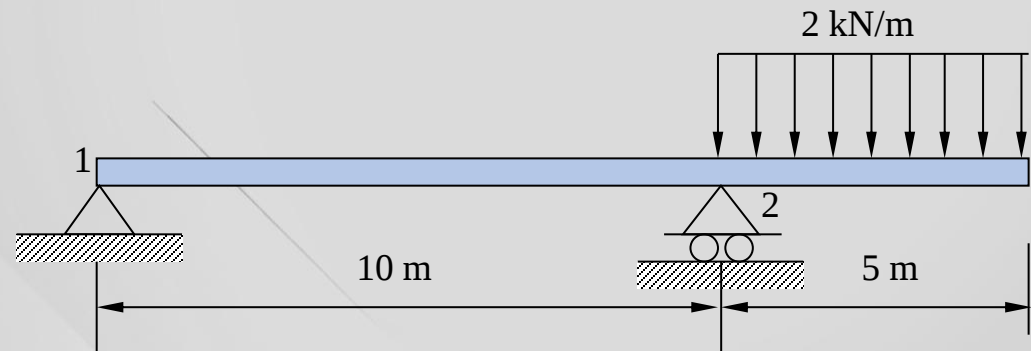
Contoh 6.9

Persamaan kerja virtual. Dengan menggunakan persamaan kerja virtual (persamaan 6.30), maka akan diperoleh (Gambar 6.17.c) :

$$\begin{aligned}
 1 \cdot y_{2v} &= 2 \left[\int_0^a \frac{(0,5x_1)(q \cdot a \cdot x_1)}{EI} dx_1 + \right. \\
 &\quad \left. \int_0^a \frac{1/2(a+x_2)(q \cdot a(a+x_2) - 0.5 \cdot q \cdot x_2^2)}{2EI} dx_2 \right] \\
 &= 2 \left[\frac{q \cdot a^4}{6EI} + \frac{49q \cdot a^4}{96EI} \right] = 2 \left[\frac{65q \cdot a^4}{96EI} \right] \\
 y_{2v} &= \frac{65q \cdot a^4}{48EI} \text{ kN.m}^3
 \end{aligned}$$

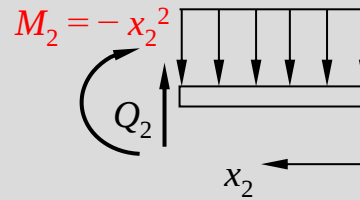
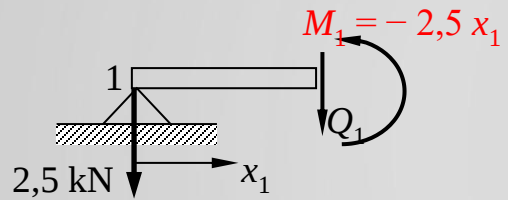
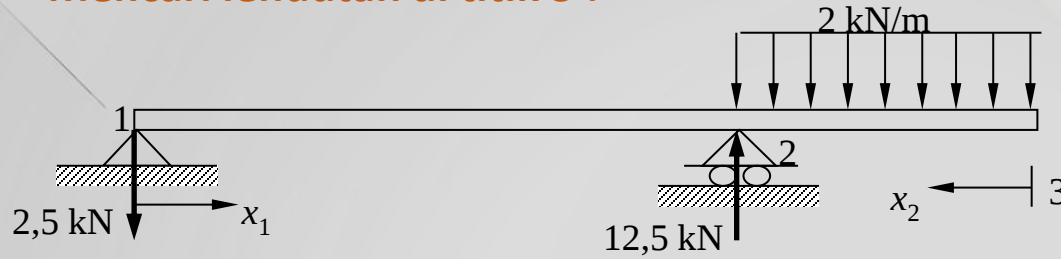
Contoh 6.10

- Gunakan metode kerja virtual untuk menentukan besar lendutan di titik 3 dan sudut rotasi di titik 1 dari struktur balok tertumpu sederhana dalam Gambar 6.18.a. Gunakan nilai $E = 200 \text{ GPa}$ dan momen inersia penampang, $I = 70(10^6) \text{ mm}^4$.

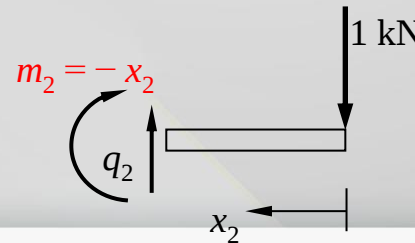
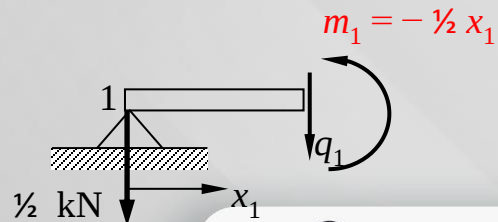
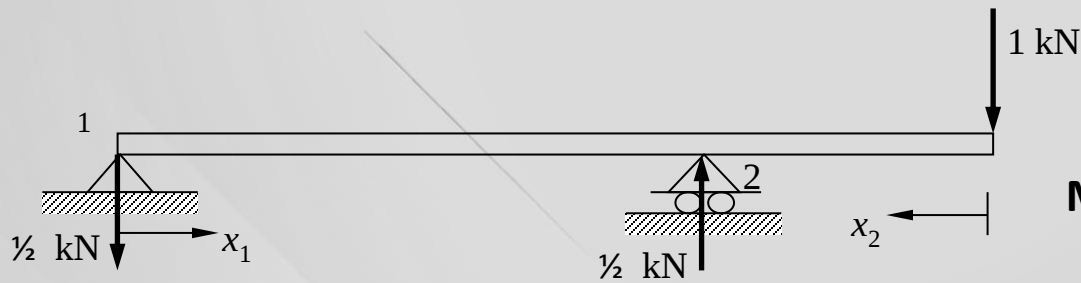


Contoh 6.10

Mencari lendutan di titik 3 :



Momen akibat beban nyata, M .



Momen virtual, m .

Persamaan kerja virtual. Gunakan persamaan kerja virtual (persamaan 6.30), maka akan diperoleh :

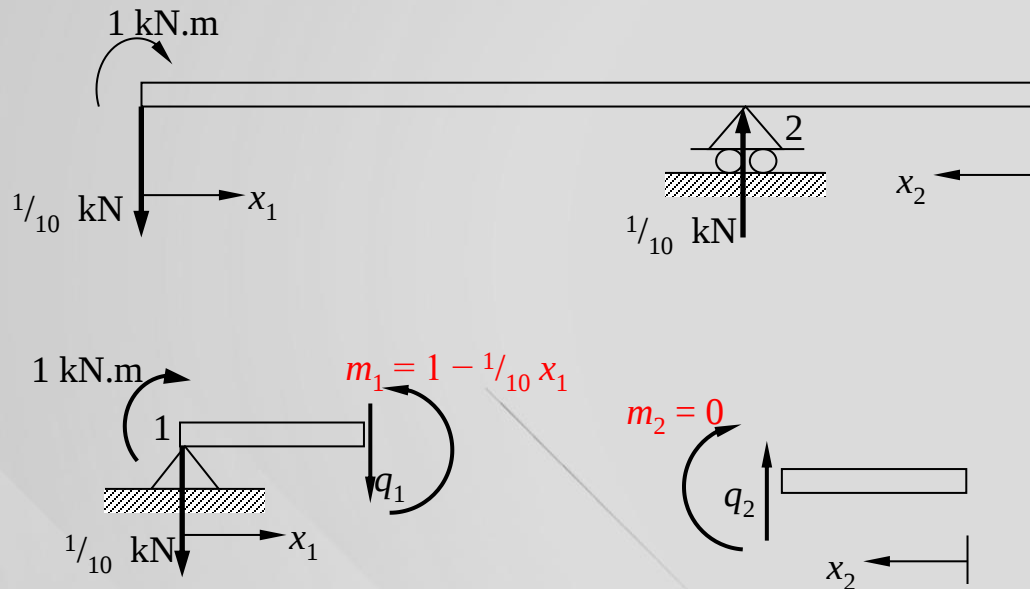
$$\begin{aligned} 1 \cdot y_{3v} &= \int_0^{10} \frac{(-0,5x_1)(-2,5x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^5 \frac{(-x_2)(-x_2^2)}{EI} dx_2 \\ &= \frac{5000}{12EI} + \frac{625}{4EI} = \frac{6875}{12EI} \text{ kN.m}^3 \end{aligned}$$

Substitusikan nilai E dan I yang diketahui, sehingga diperoleh besar lendutan di titik 3

$$y_{3v} = \frac{6875 \text{ kN.m}^3}{(200 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2)(70(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4)} = 40,92 \cdot 10^{-3} \text{ m (} \downarrow \text{)}$$

Mencari sudut rotasi di titik 1 :

Untuk mencari sudut rotasi di titik 1, berikan momen virtual 1 kN.m pada titik 1.



Persamaan kerja virtual. Gunakan persamaan kerja virtual

$$1 \cdot \theta_1 = \int_0^{10} \frac{(1 - 0,1x_1)(-2,5x_1)}{EI} dx_1$$

$$= -\frac{125}{EI} + \frac{250}{3EI} = -\frac{125}{3EI} \text{ kN.m}^2$$

Substitusikan nilai E dan I yang diketahui, sehingga diperoleh besar sudut rotasi di titik 1

$$\theta_1 = -\frac{125 \text{ kN.m}^2}{3(200 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2)(70(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4)}$$

$$= -0,00298 \text{ radian}$$