

LENDUTAN BALOK

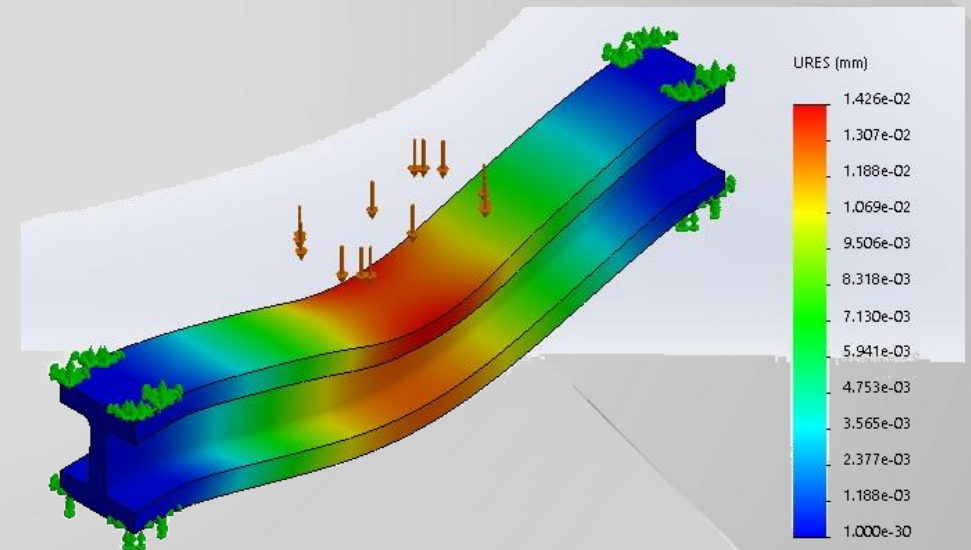
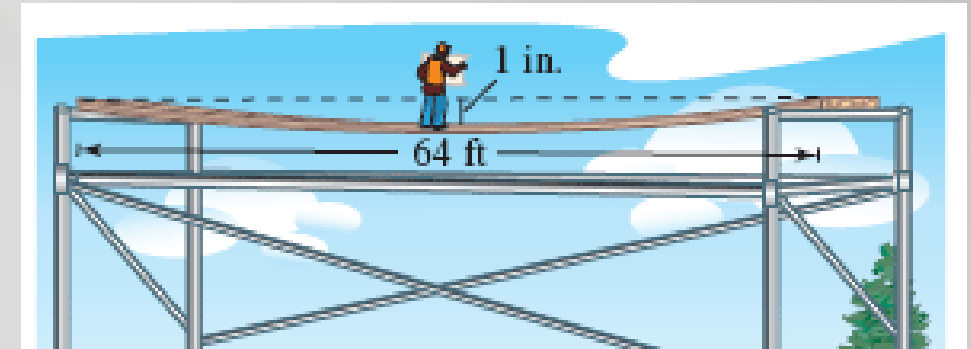
METODE DOUBLE INTEGRATION

ANALISIS STRUKTUR – TSI204 (3 sks)

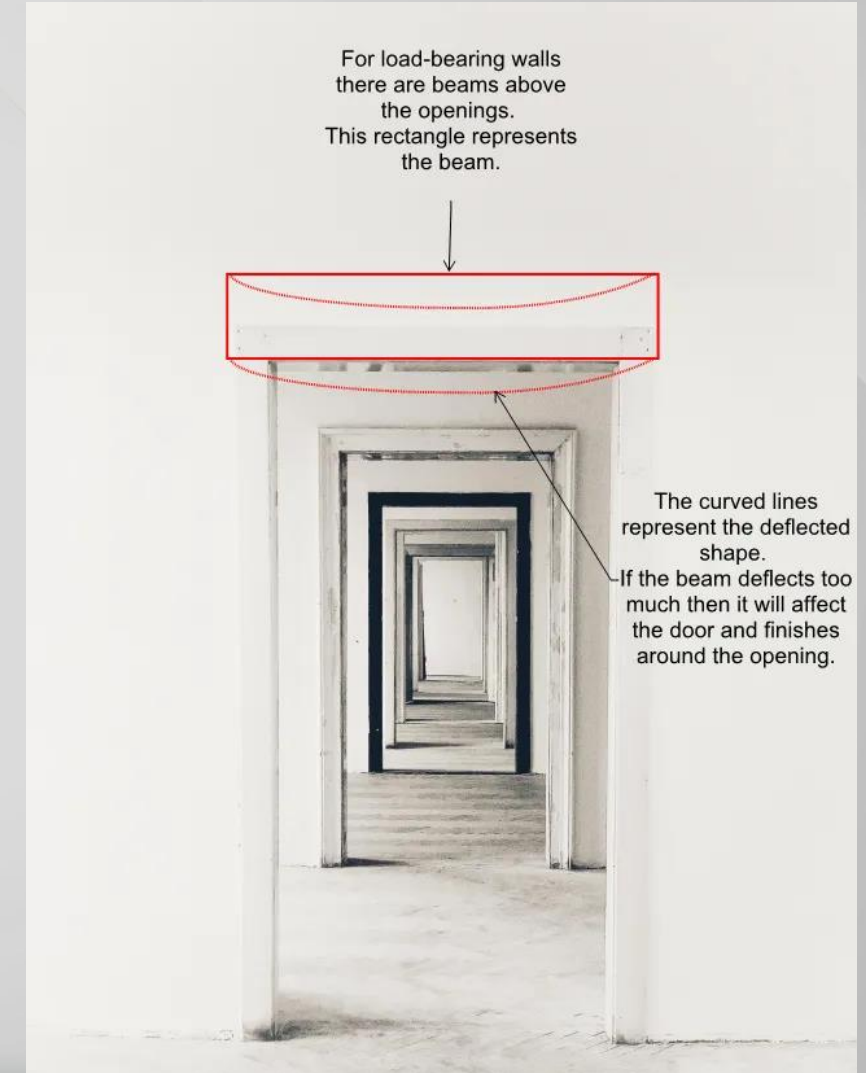
Pertemuan 1



- **Lendutan** merupakan salah satu besaran yang cukup penting dalam hal analisis struktur.
- Dalam banyak hal lendutan pada suatu struktur balok dapat terjadi akibat beberapa sebab antara lain
 - beban kerja
 - perubahan temperatur
 - kesalahan dalam fabrikasi
 - atau juga akibat penurunan (*settlement*) pada tumpuan



- Suatu struktur **tidak boleh** mengalami lendutan yang lebih besar dari suatu syarat lendutan ijin maksimum.
- Struktur balok baja dalam memikul beban tetap, memiliki batas lendutan ijin sebesar $L/240$, dengan L adalah panjang bentang balok.
- Untuk struktur yang terbuat dari material beton bertulang, lendutan yang berlebihan harus dicegah untuk menghindari retak pada penampang struktur.
- Analisis lendutan dilakukan dengan asumsi bahwa struktur terbuat dari material yang berperilaku elastis linear



Hasil kali EI dikenal dengan istilah kekakuan lentur. Karena $dx = R \cdot d\theta$, maka dapat diturunkan hubungan :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

Untuk lendutan kecil (*small displacement*) maka dapat dituliskan pula $\theta = dy/dx$, sehingga :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Gabungkan dua persamaan tersebut, maka diperoleh hubungan antara lendutan balok dengan momen lentur :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Metode Integrasi Ganda/*Double Integration*

- Metode ini didasarkan pada persamaan hubungan antara lendutan balok dan momen lentur

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

- Selanjutnya dengan mengintegrasikan persamaan tersebut :

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M(x)}{EI} + C_1$$

- Persamaan lendutan balok diperoleh dari hasil integrasi

$$\delta = y = \iint \frac{M(x)}{EI} + C_1 \cdot x + C_2$$

C_1, C_2 adalah konstanta integrasi

$M(x)$ adalah persamaan untuk momen lentur pada tiap titik dari balok

- Nilai konstanta C_1 dan C_2 yang merupakan konstanta integrasi dapat dicari dengan menerapkan **kondisi batas** yang ada.

v atau δ



$$dv/dx = \theta$$



$$d\theta/dx = M$$



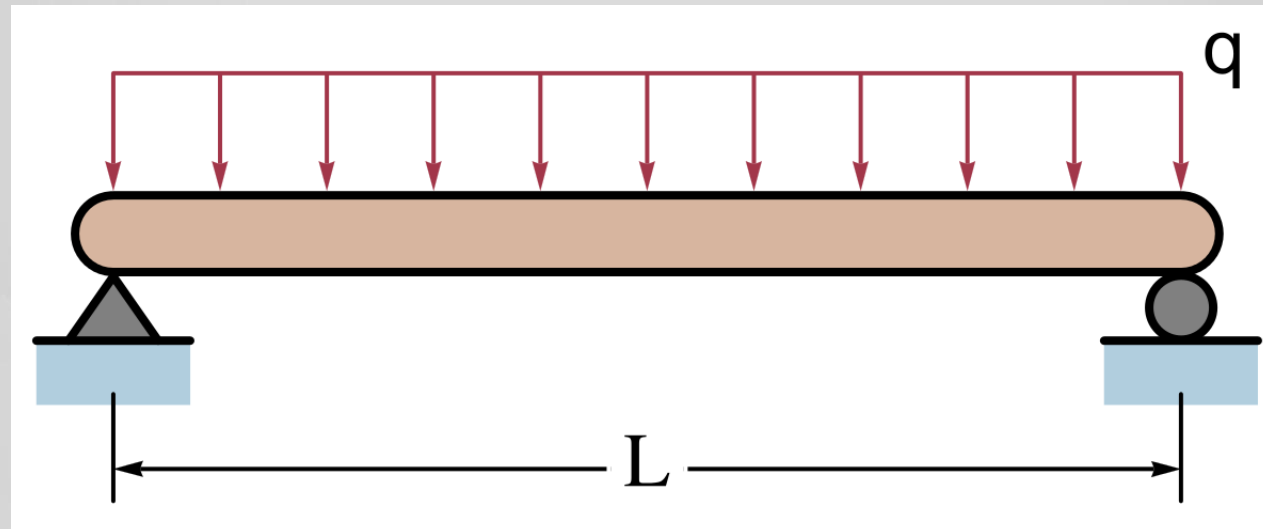
$$dM/dx = V$$



$$dV/dx = q(x)$$

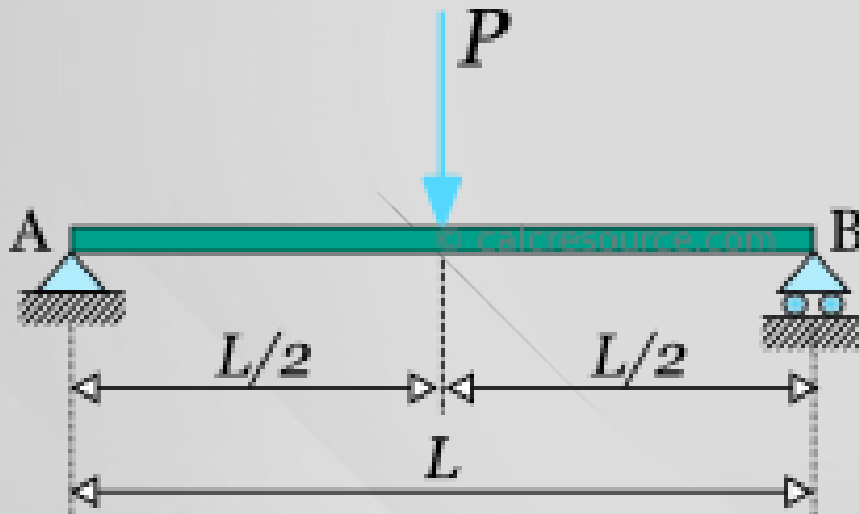
Soal 1

- Tentukan persamaan kurva elastik dari balok dalam Gambar berikut, hitung lendutan maksimum nya



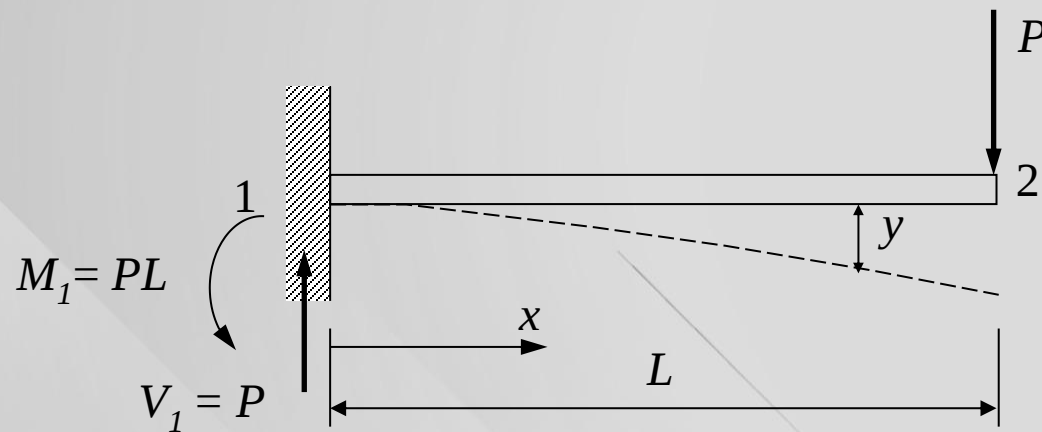
Soal 2

- Tentukan persamaan kurva elastik dari balok dalam Gambar berikut, hitung lendutan maksimum nya



Contoh 1

- Tentukan persamaan kurva elastik dari balok dalam Gambar berikut, serta tentukan besarnya lendutan di titik 2



$$M(x) = -P(L - x)$$

Substitusikan fungsi $M(x)$ ke dalam persamaan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -P(L - x) = -PL + Px$$

- Integrasikan persamaan tersebut terhadap x :

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = -PLx + \frac{1}{2}Px^2 + C_1 \quad \text{BC : } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ pada } x = 0$$

- Maka diperoleh bahwa $C_1 = 0$, sehingga

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = -PLx + \frac{1}{2}Px^2$$

- Integrasikan kembali persamaan tersebut menjadi :

$$EI \cdot y = -\frac{1}{2}PLx^2 + Px^3/6 + C_2 \quad \text{BC : } y = 0 \text{ pada } x = 0$$

- maka dapat ditentukan bahwa $C_2 = 0$, sehingga :

$$EI \cdot y = -\frac{1}{2}PLx^2 + Px^3/6$$

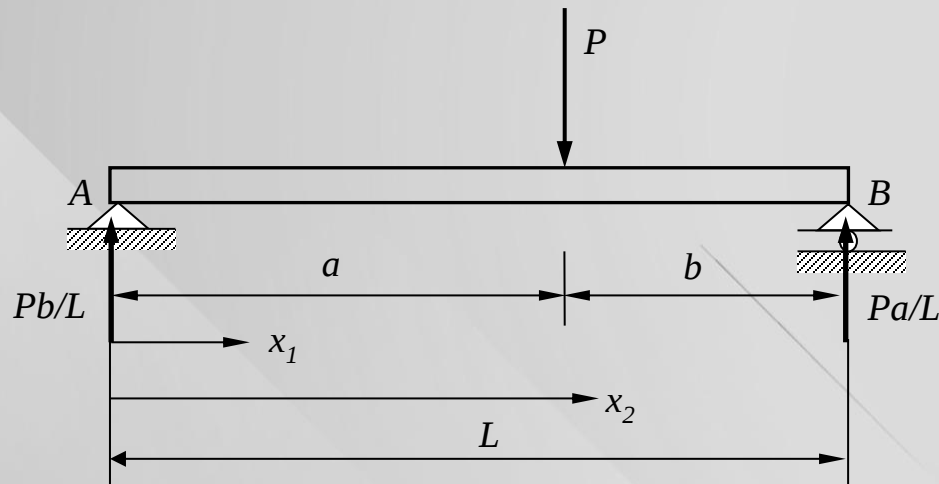
- Pada titik 2, yaitu pada saat $x = L$, besar lendutan di titik 2 adalah :

$$y = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}PL(L)^2 + P(L)^3/6 \right) = -\frac{PL^3}{3EI}$$

- Tanda negatif mengindikasikan bahwa lendutan yang terjadi adalah kearah bawah atau kearah sumbu y negatif.

Contoh 2

- Tentukan persamaan kurva elastis dari balok tertumpu sederhana dalam Gambar. Gunakan dua sistem koordinat x_1 dan x_2 seperti nampak dalam gambar.



Syarat kekontinuan :

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2}$$

$$y_1 = y_2 \quad \text{pada saat } x_1 = x_2 = a$$

Untuk $0 \leq x_1 \leq a$

$$M_1(x) = \frac{Pb}{L} \cdot x_1$$

Untuk $a \leq x_2 \leq L$:

$$M_2(x) = \frac{Pb}{L} \cdot x_2 - P(x_2 - a)$$

Kondisi Batas (BC) :

$y_1 = 0$ pada $x_1 = 0$

$y_2 = 0$ pada saat $x_2 = L$

Untuk : $0 \leq x_1 \leq a$

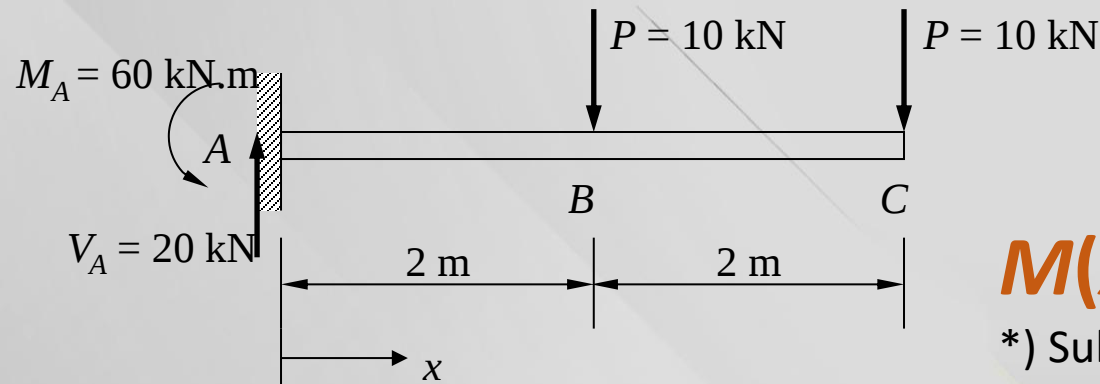
$$y_1 = \frac{Pb}{6EIL} (x_1^3 - (L^2 - b^2)x_1)$$

Untuk : $a \leq x_2 \leq L$:

$$y_2 = \frac{Pb}{6EIL} \left(x_2^3 - (L^2 - b^2)x_2 - \frac{L}{b}(x_2 - a)^3 \right)$$

Contoh 3

- Suatu balok kantilever seperti nampak dalam Gambar dengan beban P masing – masing sebesar 10 kN dan kekakuan lentur balok, $EI = 75.600 \text{ kN.m}^2$. Hitunglah besar lendutan yang terjadi pada titik B dan C, serta hitung pula sudut rotasi pada titik B dan C.



$$M(x) = 20 \cdot x - 60 - P[x - 2]$$

*) Suku $[x - 2]$ akan bernilai sama dengan nol apabila $x < 2$.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = 20 \cdot x - 60 - 10[x - 2]$$

$$EI \frac{dy}{dx} = 10 \cdot x^2 - 60 \cdot x - 5[x - 2]^2 + C_1$$

$$EI y = \frac{10}{3} \cdot x^3 - 30x^2 - \frac{5}{3}[x - 2]^3 + C_1 \cdot x + C_2$$

Dari syarat kondisi batas :

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \text{ pada } x = 0 \\ \text{dan } dy/dx = 0 \text{ pada } x = 0 \end{array} \right\} C_1 = C_2 = 0$$

$$EI y = \frac{10}{3} x^3 - 30x^2 - \frac{5}{3}[x - 2]^3$$

Lendutan di titik B dan C

Pada titik B ($x = 2$)

$$EI y = \frac{10}{3} \cdot (2)^3 - 30(2)^2 - \frac{5}{3}[2 - 2]^3$$

$$y = -\frac{280}{3EI} = -\frac{280}{3 \times 75.600} = -1,23 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -1,23 \text{ mm}$$

Pada titik C ($x = 4$)

$$y = -\frac{280}{EI} = -\frac{280}{75.600} = -3,70 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ = -3,70 \text{ mm}$$

Sudut rotasi, θ , di titik B dan C

Pada titik B ($x = 2$)

$$EI \frac{dy}{dx} = 10 \cdot x^2 - 60 \cdot x - 5[x - 2]^2$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}(10(2)^2 - 60(2)) = -\frac{80}{EI}$$

$$\theta = -1,06 \cdot 10^{-3} \text{ radian}$$

Pada titik C ($x = 4$)

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}(10(4)^2 - 60(4) - 5(2)^2) = -\frac{100}{EI}$$

$$\theta = -1,32 \cdot 10^{-3} \text{ radian}$$