

Mata Kuliah : Analisis Struktur  
Kode : CIV - 209  
SKS : 4 SKS

# *Analisis Struktur Statis Tak Tentu dengan Metode Slope-Deflection*

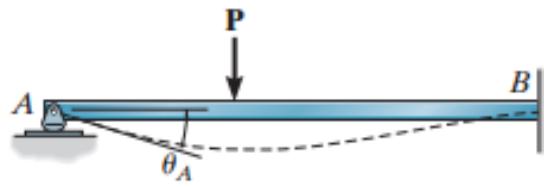
Pertemuan – 12, 13

- **Kemampuan Akhir yang Diharapkan**
  - Mahasiswa dapat melakukan analisis struktur statis tak tentu dengan metode Slope-Deflection
- **Sub Pokok Bahasan :**
  - Persamaan Slope-Deflection
  - Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection
  - Analisis Portal Tak Bergoyang
  - Analisis Portal Bergoyang

## Persamaan Slope-Deflection

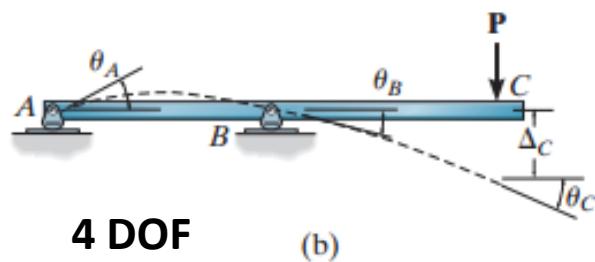
- Perpindahan(displacement) merupakan variabel utama yang tak diketahui, disebut pula sebagai derajat kebebasan (degree of freedom)
- Jumlah Degree of Freedom yang dimiliki suatu struktur sering juga disebutkan sebagai derajat ketidaktentuan kinematik
- Perpindahan yang dimaksud selain lendutan dapat pula berupa sudut rotasi pada suatu titik
- Selanjutnya disusun pula persamaan kompatibilitas untuk mendapatkan perpindahan dari titik-titik kumpul, dan kemudian dapat digunakan untuk menghitung reaksi tumpuan
- Tiga metode analisis struktur berbasis displacement adalah : slope-deflection, distribusi momen dan metode matriks

## Persamaan Slope-Deflection



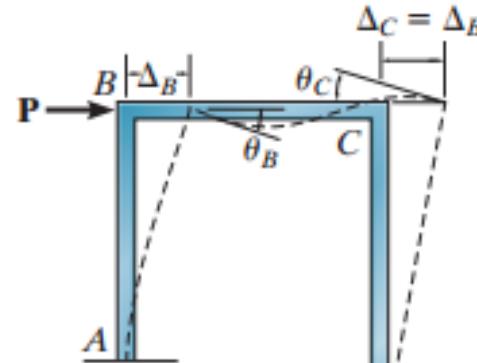
(a)

**1 DOF**



**4 DOF**

(b)

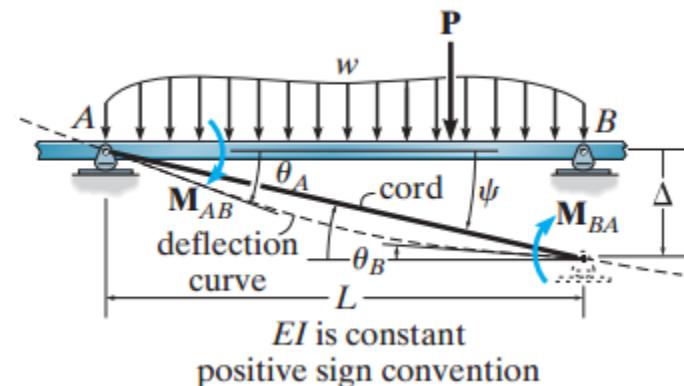


**3 DOF**

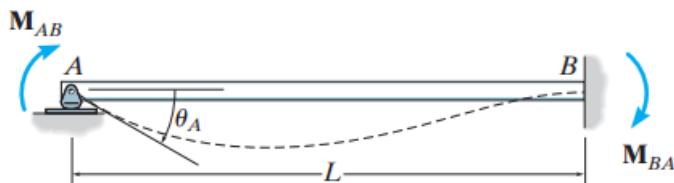
(c)

## Persamaan Slope-Deflection

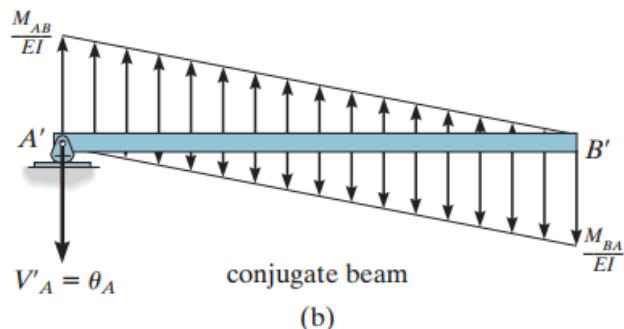
- Merupakan sebuah persamaan yang menghubungkan antara sudut rotasi (slope) dan lendutan (deflection) dengan beban yang bekerja pada struktur
- Perhatikan balok AB yang merupakan bagian dari struktur balok menerus dengan beban sembarang sebesar  $w$  dan memiliki kekakuan seragam sebesar  $EI$ .
- Selanjutnya akan dicari hubungan antara momen ujung  $M_{AB}$  dan  $M_{BA}$  dengan sudut rotasi  $\theta_A$  dan  $\theta_B$  serta lendutan  $\Delta$  yang mengakibatkan penurunan pada tumpuan B.
- Sesuai dengan perjanjian tanda yang dipakai, maka **momen dan sudut rotasi bernilai positif** apabila memiliki arah putar searah jarum jam.
- Sedangkan **lendutan  $\Delta$  dianggap bernilai positif** apabila mengakibatkan balok berputar sebesar sudut  $\psi$  searah jarum jam.



## Persamaan Slope-Deflection



real beam  
(a)



conjugate beam  
(b)

- $\sum M_A' = 0$

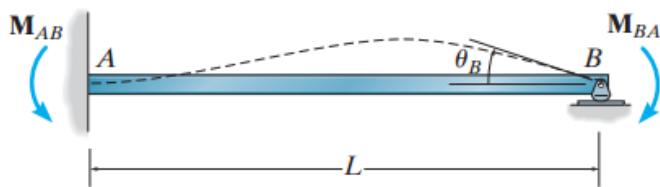
$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{M_{AB}}{EI} \right) L \right] \frac{L}{3} - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{M_{BA}}{EI} \right) L \right] \frac{2L}{3} = 0$$

- $\sum M_B' = 0$

$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{M_{BA}}{EI} \right) L \right] \frac{L}{3} - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{M_{AB}}{EI} \right) L \right] \frac{2L}{3} + \theta_A L = 0$$

$$M_{AB} = \frac{4EI}{L} \theta_A$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L} \theta_A \quad (1)$$

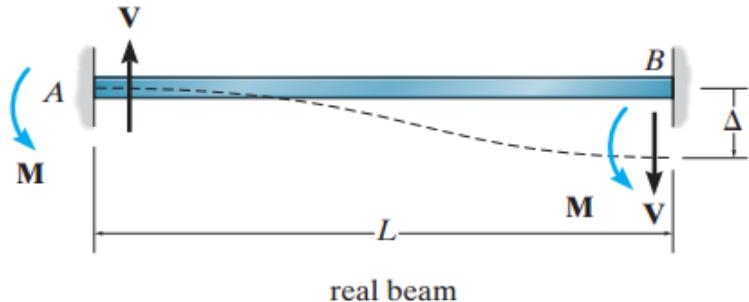


$$M_{BA} = \frac{4EI}{L} \theta_B$$

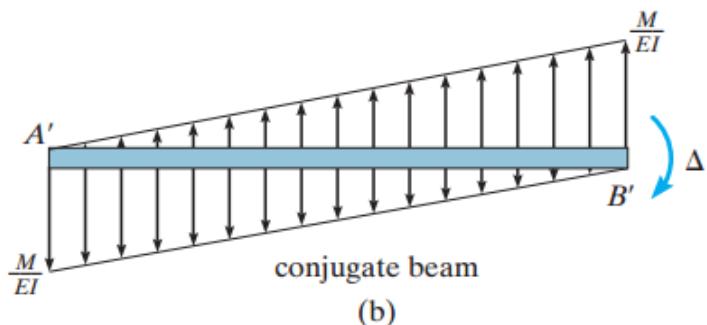
$$M_{AB} = \frac{2EI}{L} \theta_B \quad (2)$$

## Persamaan Slope-Deflection

- $\sum M_B' = 0$



$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{M}{EI} \right) L \right] \frac{2L}{3} - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{M}{EI} \right) L \right] \frac{L}{3} - \Delta = 0$$



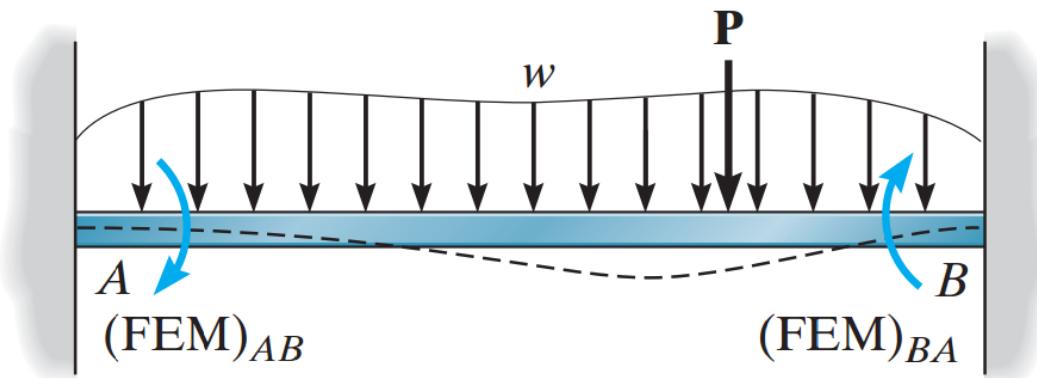
$$M_{AB} = M_{BA} = M = \frac{-6EI}{L^2} \Delta \quad (3)$$

## Persamaan Slope-Deflection

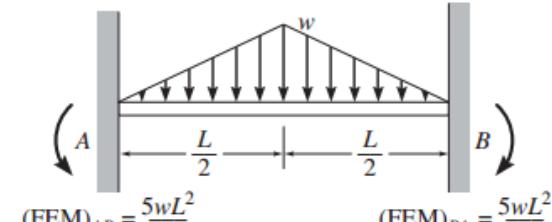
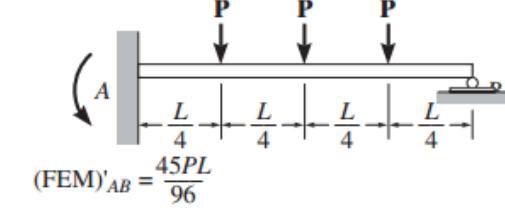
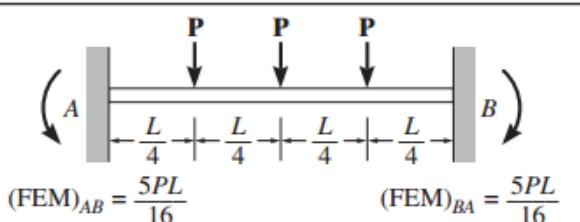
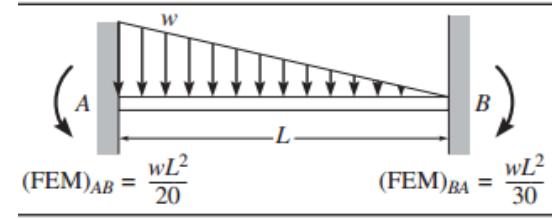
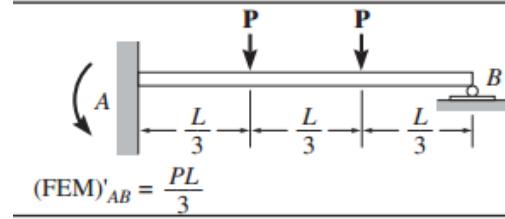
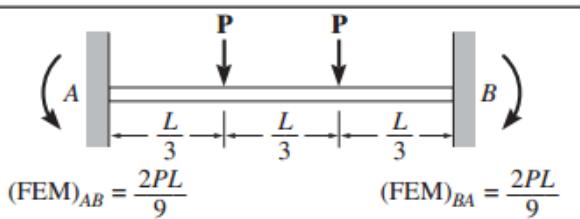
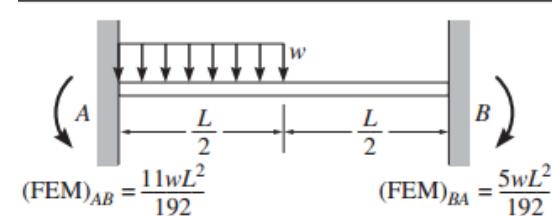
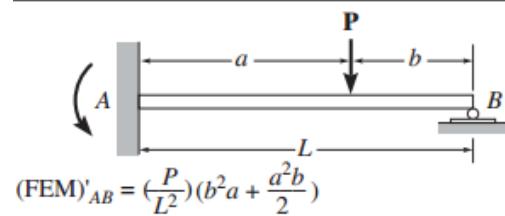
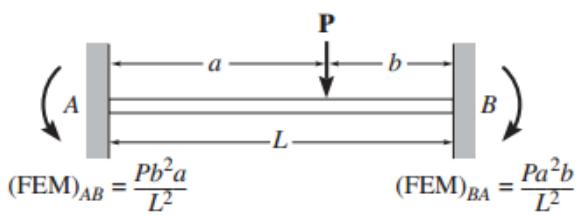
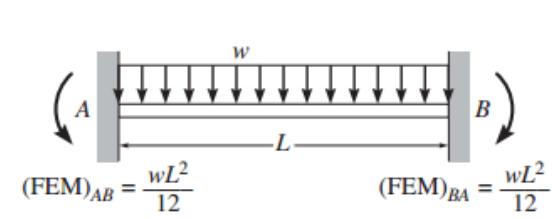
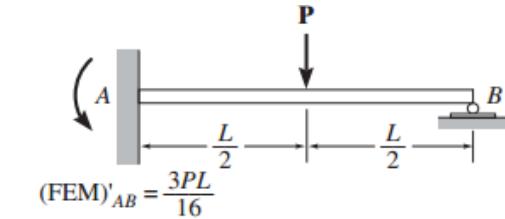
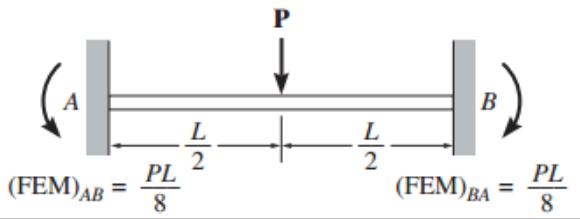
- Dalam uraian sebelumnya telah diturunkan hubungan antara  $M_{AB}$  dan  $M_{BA}$  yang bekerja pada titik A dan B dengan perpindahan yang diakibatkan olehnya, yaitu  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  dan  $\Delta$ .
- Pada kenyataannya perpindahan yang terjadi, baik berupa sudut rotasi maupun lendutan pada balok terjadi bukan disebabkan oleh momen pada titik tersebut, namun disebabkan oleh beban luar yang bekerja pada bentangan balok.
- Supaya beban luar tersebut dapat diakomodasi dalam persamaan *slope – deflection*, maka beban luar tersebut harus ditransformasi menjadi momen ekuivalen yang bekerja pada titik ujung balok.
- Hal ini dapat dilakukan dengan mudah, yaitu dengan menemukan reaksi momen yang timbul pada kedua ujung balok yang dianggap memiliki tumpuan jepit.

## Persamaan Slope-Deflection

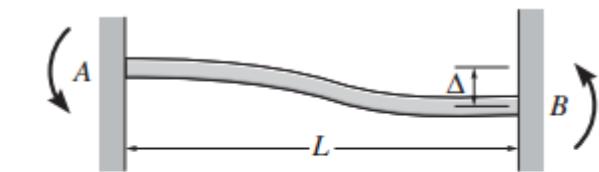
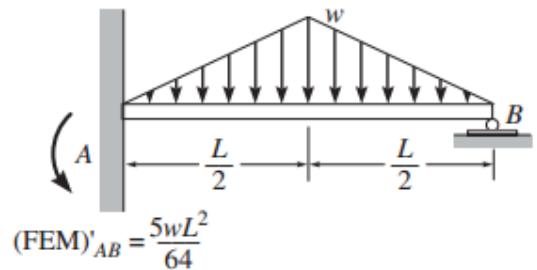
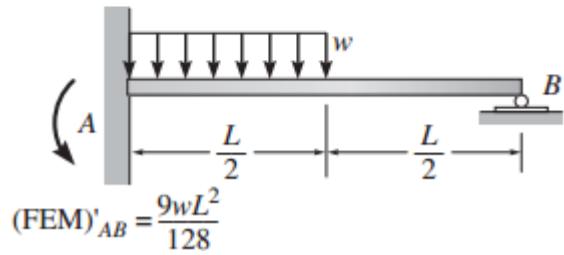
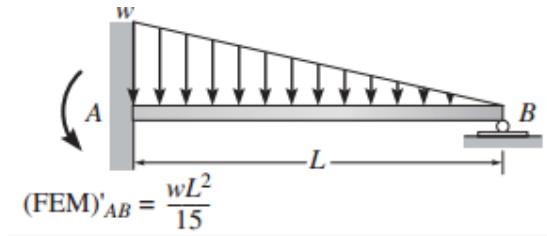
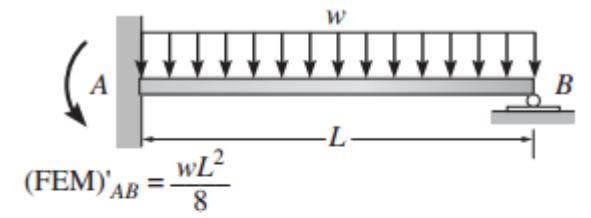
- Reaksi momen tersebut selanjutnya diistilahkan dengan sebutan *Fixed-End Moment* (FEM)
- Sesuai dengan perjanjian tanda, maka nilai FEM pada ujung A adalah negatif (berlawanan dengan jarum jam), dan nilai FEM pada ujung B adalah positif (searah jarum jam)



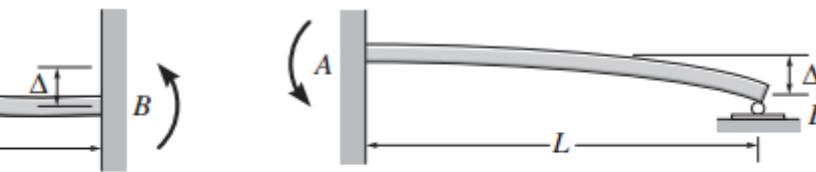
## Persamaan Slope-Deflection



## Persamaan Slope-Deflection



$$(\text{FEM})_{AB} = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$



$$(\text{FEM})_{BA} = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad (\text{FEM})'_{AB} = \frac{3EI\Delta}{L^2}$$

## Persamaan Slope-Deflection

- Selanjutnya persamaan-persamaan 1, 2 dan 3 dapat dijumlahkan beserta beban luar yang bekerja, dan dapat dituliskan menjadi :

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{L}\right)\left[2\theta_A + \theta_B - 3\left(\frac{\Delta}{L}\right)\right] + (\text{FEM})_{AB}$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{L}\right)\left[2\theta_B + \theta_A - 3\left(\frac{\Delta}{L}\right)\right] + (\text{FEM})_{BA}$$

- Atau secara umum bentuk persamaan slope-deflection adalah :

$$M_N = 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\Psi) + (\text{FEM})_N \quad (4)$$

## Persamaan Slope-Deflection

- Dengan :

$M_N$  adalah momen internal pada ujung dekat

$E, k$  adalah modulus elastisitas dan kekakuan balok  $k = I/L$

$\theta_N, \theta_F$  adalah sudut rotasi pada ujung dekat dan ujung jauh, memiliki satuan radian dan bernilai positif apabila memiliki arah sesuai putaran jarum jam

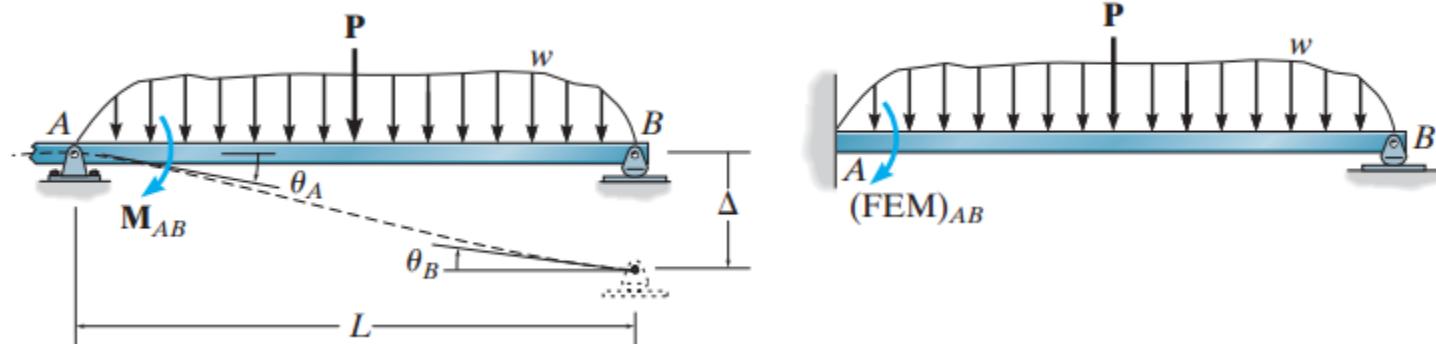
$\psi$  adalah rotasi balok akibat adanya penurunan pada tumpuan,  $\psi = \Delta/L$ , besaran ini memiliki satuan radian dan bernilai positif apabila searah jarum jam

$(FEM)_N$  adalah Fixed End Moment pada ujung dekat, bernilai positif apabila memiliki arah sesuai putaran jarum jam

## Persamaan Slope-Deflection

- Persamaan 4 berlaku apabila ujung-ujung balok terjepit, apabila salah satu ujungnya sendi, maka persamaan slope-deflection menjadi :

$$M_N = 3Ek(\theta_N - \Psi) + (\text{FEM})_N \quad (5)$$



## Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

### Example 11.1

Gambarkan diagram gaya lintang dan momen lentur untuk balok pada Gambar, asumsikan EI konstan

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{wL^2}{30} = -\frac{6(6)^2}{30} = -7,2 \text{kN} \cdot \text{m}$$

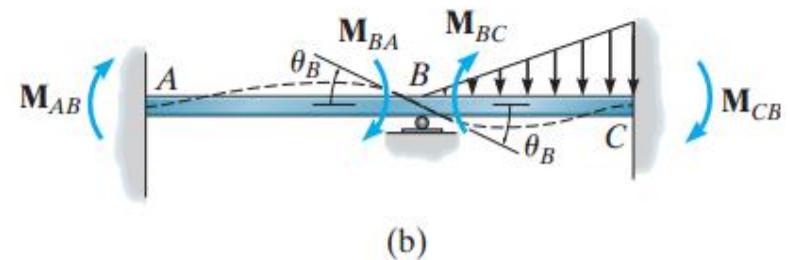
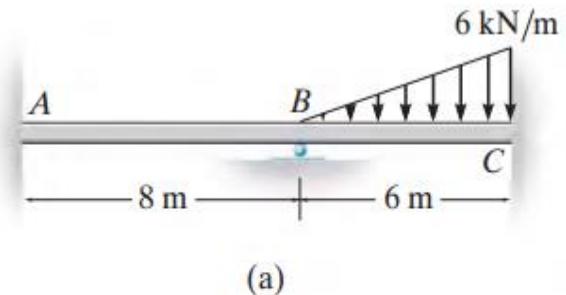
$$(\text{FEM})_{CB} = \frac{wL^2}{20} = \frac{6(6)^2}{20} = 10,8 \text{kN} \cdot \text{m}$$

dari persamaan slope - deflection

$$M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 0 = \frac{EI}{4}\theta_B$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 0 = \frac{EI}{2}\theta_B$$

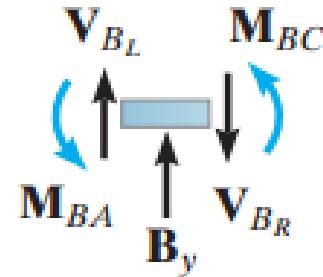


## Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

### Example 11.1

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] - 7,2 = \frac{2EI}{3}\theta_B - 7,2$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 10,8 = \frac{EI}{3}\theta_B + 10,8$$



Dengan meninjau keseimbangan titik B diperoleh :

$$\sum M_B = 0 \quad M_{BA} + M_{BC} = 0$$

Akhirnya didapatkan  $\theta_B = 6,17/EI$

Substitusikan  $\theta_B$  ke persamaan-persamaan sebelumnya dan diperoleh :

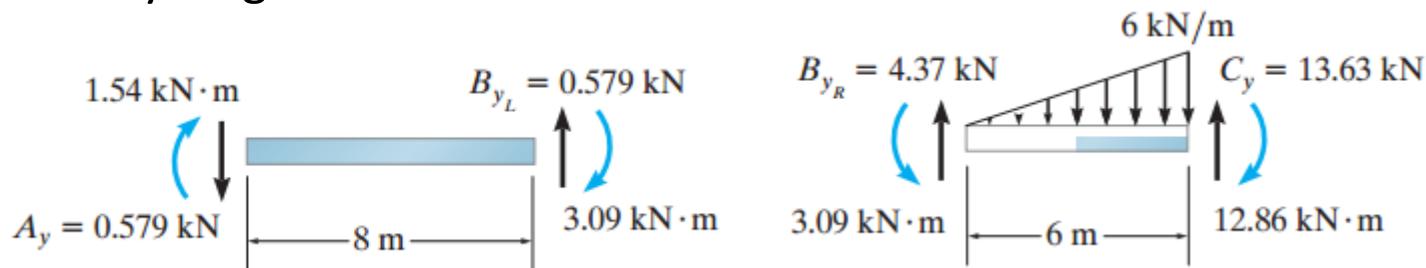
$$M_{AB} = 1,54 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_{BA} = 3,09 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = -3,09 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_{CB} = 12,86 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

## Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

### Example 11.1

Free body diagram :



$$A_y = - (1,54/8) - (3,09/8) = - 0,579 \text{ kN} (\downarrow)$$

$$B_{yL} = (1,54/8) + (3,09/8) = 0,579 \text{ kN} (\uparrow)$$

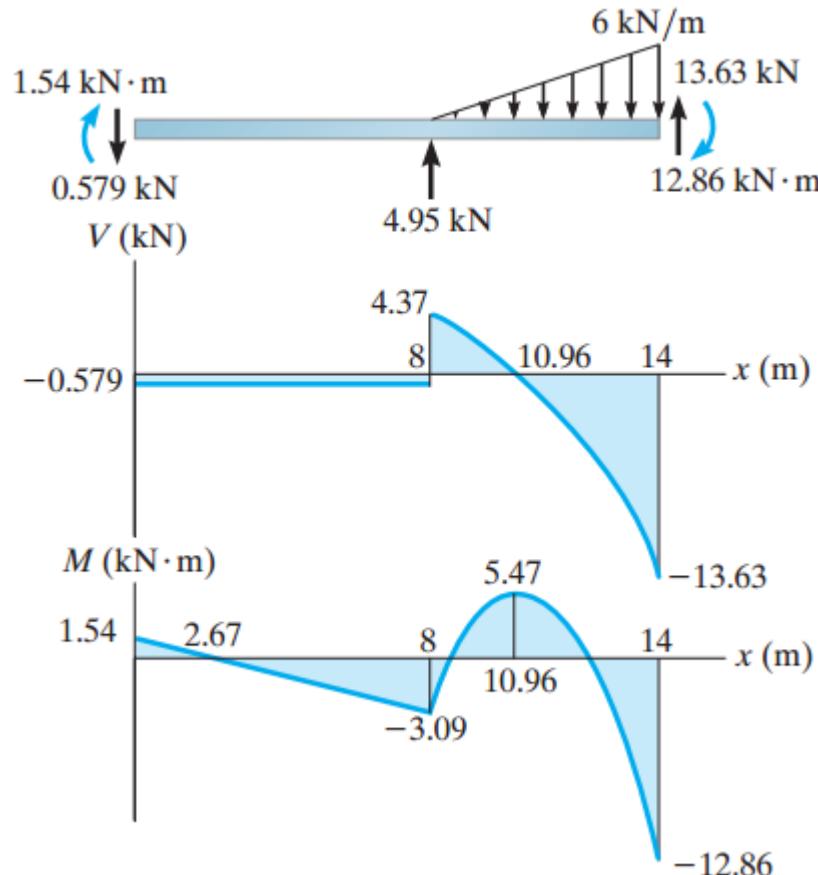
$$B_{yR} = (3,09/6) - (12,86/6) + (0,5*6*6*2/6) = 4,37 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$C_y = -(3,09/6) + (12,86/6) + (0,5*6*6*4/6) = 13,63 \text{ kN} (\uparrow)$$

## Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

### Example 11.1

Diagram Gaya Geser dan  
Momen Lentur :



## Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

### Example 11.2

Gambarkan diagram gaya lintang dan momen lentur untuk balok pada Gambar, asumsikan EI konstan

$$(FEM)_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{40(6)^2}{12} = -120 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{12} = \frac{40(6)^2}{12} = 120 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

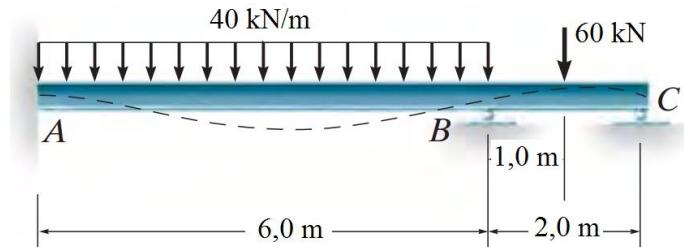
$$(FEM)_{BC} = -\frac{3PL}{16} = -\frac{3(60)(2)}{16} = -22,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

dari persamaan slope - deflection

$$M_N = 2E\left(\frac{I}{L}\right)(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] - 120 = 0,3333EI\theta_B - 120$$

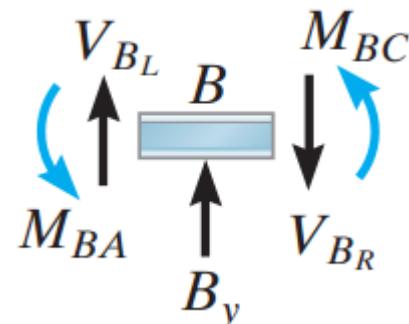
$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 120 = 0,667EI\theta_B + 120$$



Untuk balok AC gunakan persamaan slope - deflection

$$M_N = 3E\left(\frac{I}{L}\right)(\theta_N - \psi) + (FEM)_N$$

$$M_{BC} = 3E\left(\frac{I}{2}\right)[\theta_B - 0] - 22,5 = 1,5EI\theta_B - 22,5$$



## Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

### Example 11.2

Dari keseimbangan gaya titik B :

$$\sum M_B = 0 \quad M_{BA} + M_{BC} = 0$$

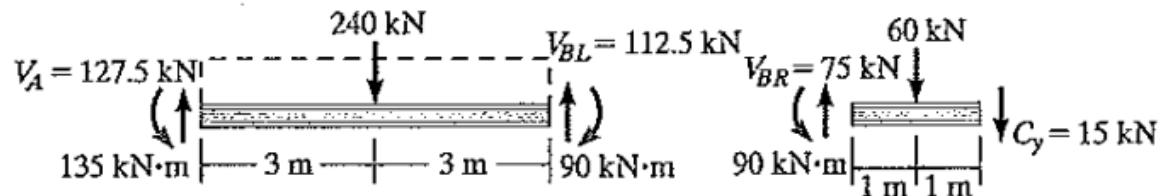
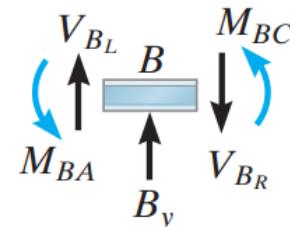
Dan nilai  $\theta_B = -144/EI$ .

Substitusikan  $\theta_B$  ke persamaan-persamaan sebelumnya guna mendapatkan :

$$M_{AB} = -135 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA} = 90 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = -90 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



## Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

### Example 11.3

Tentukan momen di A dan B pada balok, apabila tumpuan B mengalami penurunan sebesar 80 mm.  
 $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 5(10)^6 \text{ mm}^4$

$$\psi_{AB} = \psi_{BA} = \frac{0,08\text{m}}{4} = 0,02\text{rad}$$

$$k_{AB} = \frac{I}{L} = \frac{5(10)^6 \text{ mm}^4 (10^{-12}) \text{ m}^4 / \text{mm}^4}{4\text{m}} = 1,25(10)^{-6} \text{ m}^3$$

$$M_{AB} = 2(200 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2) [1,25 \cdot 10^{-6}] [2(0) + \theta_B - 3(0,02)] + 0 \\ = 500.000\theta_B - 30.000$$

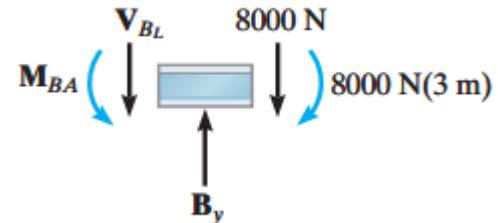
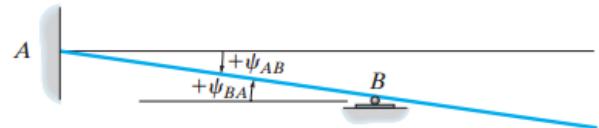
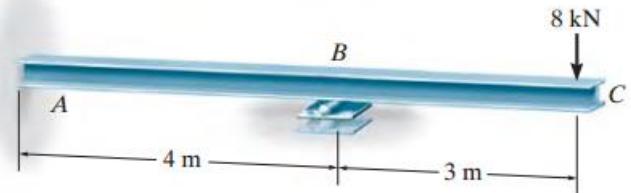
$$M_{BA} = 2(200 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2) [1,25 \cdot 10^{-6}] [2\theta_B + 0 - 3(0,02)] + 0 \\ = 1.000.000\theta_B - 30.000$$

Dari kesetimbangan titik B :

$$\sum M_B = 0$$

$$M_{BA} - 8000\text{N}(3\text{m}) = 0$$

$$\theta_B = 0,054 \text{ rad}$$



## Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

### Example 11.4

Tentukan momen internal pada tumpuan balok apabila titik C mengalami penurunan sebesar 30 mm.  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $I = 600(10)^6 \text{ mm}^4$

$$(\text{FEM})_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{20(7,2)^2}{12} = -86,4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

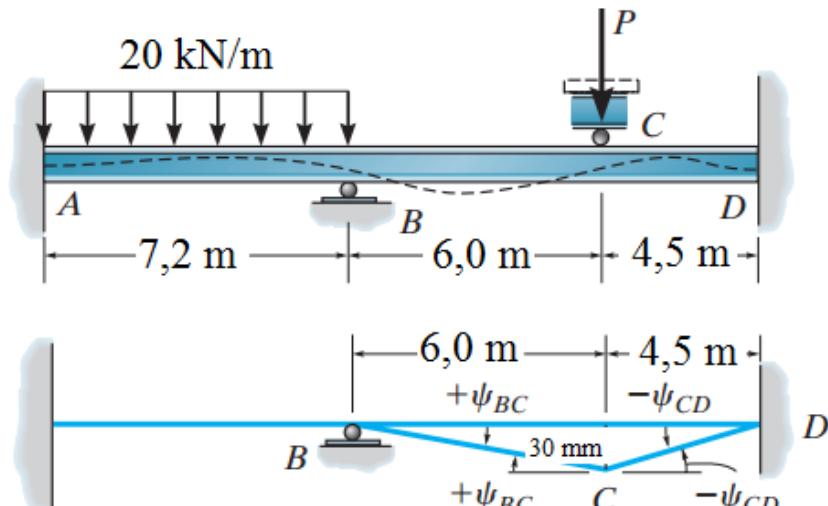
$$(\text{FEM})_{BA} = \frac{wL^2}{12} = \frac{20(7,2)^2}{12} = 86,4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\psi_{BC} = \frac{0,03}{6} = 0,005 \text{ rad} \quad \psi_{CD} = -\frac{0,03}{4,5} = -0,00667 \text{ rad}$$

$$k_{AB} = \frac{600 \cdot 10^6 \times 10^{-12}}{7,2} = 83,33(10^{-6}) \text{ m}^3$$

$$k_{BC} = \frac{600 \cdot 10^6 \times 10^{-12}}{6} = 100(10^{-6}) \text{ m}^3$$

$$k_{CD} = \frac{600 \cdot 10^6 \times 10^{-12}}{4,5} = 133,33(10^{-6}) \text{ m}^3$$



## Analisis Balok Dengan Metode Slope-Deflection

### Example 11.4

Bentang AB:

$$M_{AB} = 2[200 \cdot 10^6][83,33 \cdot 10^{-6}][2(0) + \theta_B - 3(0)] - 86,4 = 33.333,3\theta_B - 86,4$$

$$M_{BA} = 2[200 \cdot 10^6][83,33 \cdot 10^{-6}][2\theta_B + 0 - 3(0)] + 86,4 = 66.666,7\theta_B + 86,4$$

Bentang BC:

$$M_{BC} = 2[200 \cdot 10^6][100 \cdot 10^{-6}][2\theta_B + \theta_C - 3(0,005)] + 0 = 80.000\theta_B + 40.000\theta_C - 600$$

$$M_{CB} = 2[200 \cdot 10^6][100 \cdot 10^{-6}][2\theta_C + \theta_B - 3(0,005)] + 0 = 80.000\theta_C + 40.000\theta_B - 600$$

Bentang CD:

$$M_{CD} = 2[200 \cdot 10^6][133,33 \cdot 10^{-6}][2\theta_C + 0 - 3(-0,00667)] + 0 = 106.666,7\theta_C + 1066,7$$

$$M_{DC} = 2[200 \cdot 10^6][133,33 \cdot 10^{-6}][20 + \theta_C - 3(-0,00667)] + 0 = 53.333,3\theta_C + 1066,7$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad M_{CB} + M_{CD} = 0$$



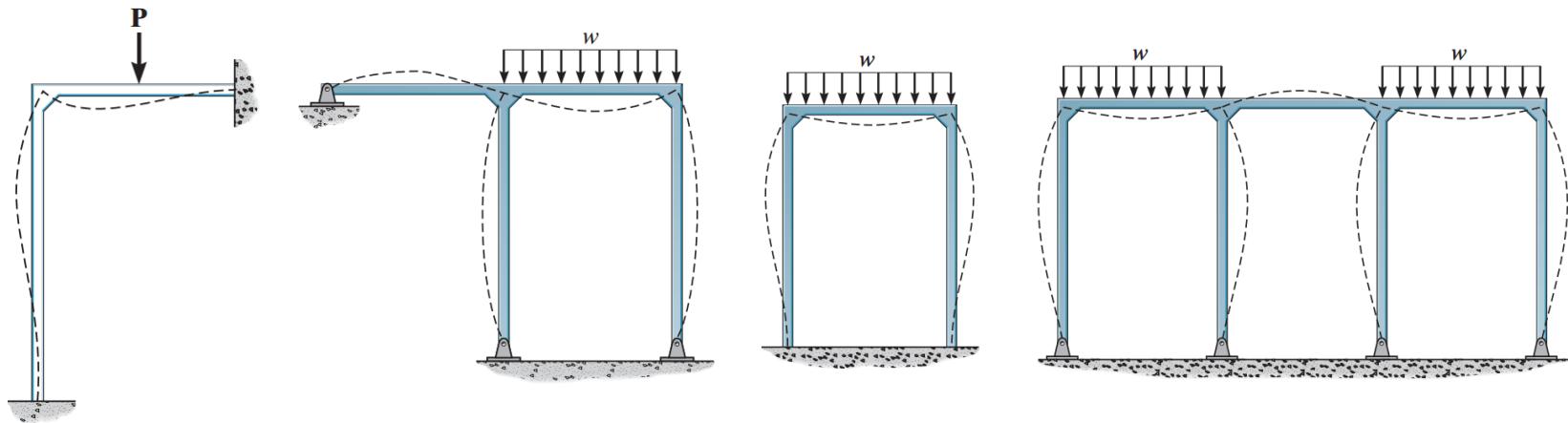
$$\theta_B = 0,00444 \text{ rad} \quad \theta_C = -0,00345 \text{ rad}$$

**TUGAS :**

Kerjakan soal dari textbook Bab XI Nomor 11.1 s/d 11.12

## Analisis Portal Tak Bergoyang Metode Slope-Deflection

- Suatu portal dikategorikan sebagai portal tak bergoyang apabila :
  1. Disediakan tumpuan yang cukup untuk menahan goyangan
  2. Memiliki geometri dan pola pembebanan yang simetris



Contoh-contoh Portal Tak Bergoyang (No Sidesway)

## Analisis Portal Tak Bergoyang Metode Slope-Deflection

### Example 11.5

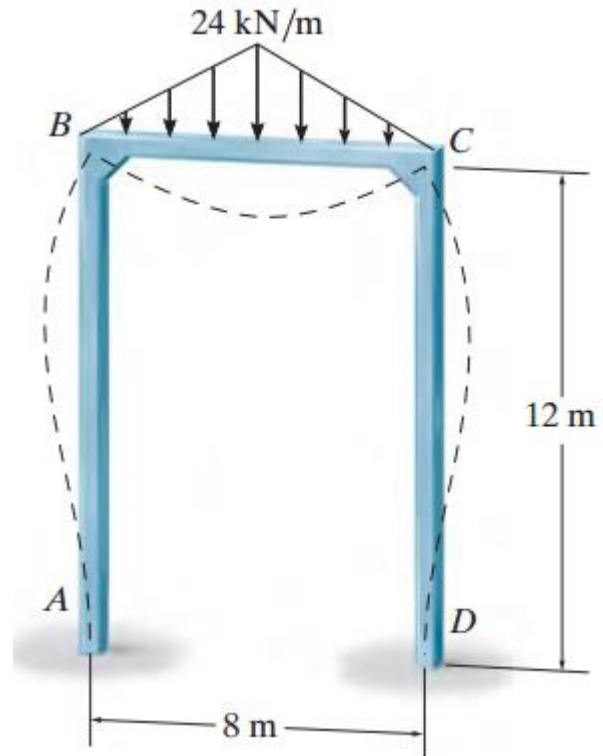
Tentukan momen pada tiap titik kumpul,  
apabila EI konstan

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{5wL^2}{96} = -\frac{5(24)(8)^2}{96} = -80 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(\text{FEM})_{CB} = \frac{5wL^2}{96} = \frac{5(24)(8)^2}{96} = 80 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\theta_A = \theta_D = 0$$

$$\psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = 0 \quad (\text{tak bergoyang})$$



## Analisis Portal Tak Bergoyang Metode Slope-Deflection

### Example 11.5

$$M_N = 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (\text{FEM})_N$$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2(0) + \theta_B - 3(0)] + 0 = 0,1667EI\theta_B$$

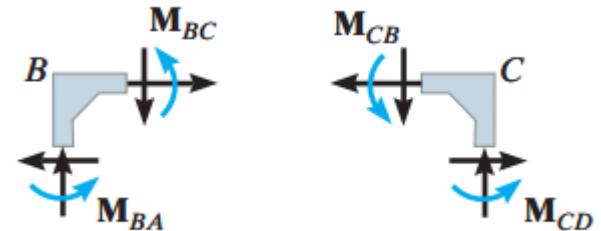
$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2\theta_B + 0 - 3(0)] + 0 = 0,333EI\theta_B$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2\theta_B + \theta_C - 3(0)] - 80 = 0,5EI\theta_B + 0,25EI\theta_C - 80$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{8}\right)[2\theta_C + \theta_B - 3(0)] + 80 = 0,5EI\theta_C + 0,25EI\theta_B + 80$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2\theta_C + 0 - 3(0)] + 0 = 0,333EI\theta_C$$

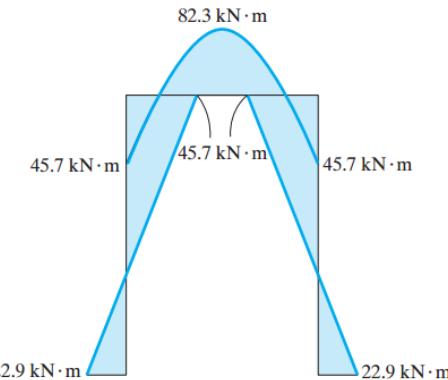
$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{12}\right)[2(0) + \theta_C - 3(0)] + 0 = 0,1667EI\theta_C$$



$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

$$\begin{cases} 0,833EI\theta_B + 0,25EI\theta_C = 80 \\ 0,25EI\theta_B + 0,833EI\theta_C = -80 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \theta_B = -\theta_C \\ \theta_B = \frac{137,1}{EI} \end{array} \right.$$



## Analisis Portal Tak Bergoyang Metode Slope-Deflection

### Example 11.6

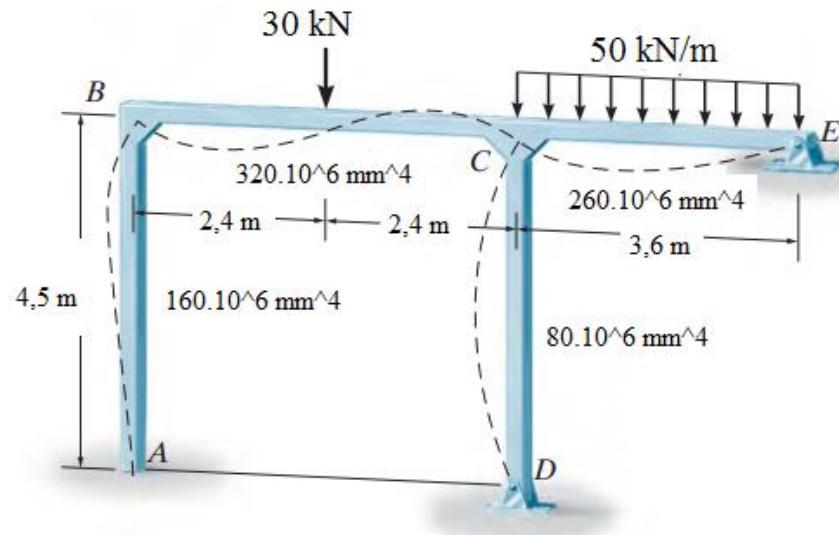
Tentukan momen pada tiap titik kumpul, gunakan  $E = 200 \text{ GPa}$

$$k_{AB} = \frac{160(10^6)(10^{-12})}{4,5} = 35,56(10^{-6})\text{m}^3$$

$$k_{BC} = \frac{320(10^6)(10^{-12})}{4,8} = 66,67(10^{-6})\text{m}^3$$

$$k_{CD} = \frac{80(10^6)(10^{-12})}{4,5} = 17,78(10^{-6})\text{m}^3$$

$$k_{CE} = \frac{260(10^6)(10^{-12})}{3,6} = 72,23(10^{-6})\text{m}^3$$



## Analisis Portal Tak Bergoyang Metode Slope-Deflection

### Example 11.6

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{PL}{8} = -\frac{30(4,8)}{8} = -18 \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$(\text{FEM})_{CB} = \frac{PL}{8} = \frac{30(4,8)}{8} = 18 \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$(\text{FEM})_{CE} = -\frac{wL^2}{8} = -\frac{50(3,6)^2}{8} = -81 \text{kN}\cdot\text{m}$$

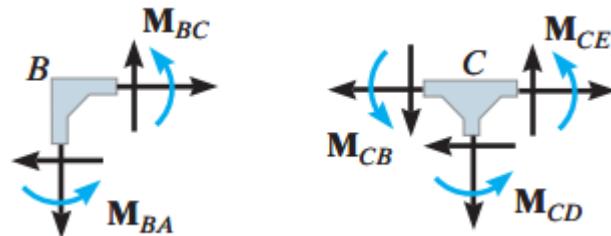
$$\theta_A = 0$$

$$\psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = \psi_{CE} = 0 \quad (\text{tak bergoyang})$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$M_{CB} + M_{CD} + M_{CE} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 61.759,3\theta_B + 20.138,9\theta_C = 12 \\ 20.138,9\theta_B + 81.059,0\theta_C = 42 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \theta_B = 2,758(10^{-5})\text{rad} \\ \theta_C = 5,113(10^{-4})\text{rad} \end{array}$$



$$M_{AB} = 0,444 \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BA} = 0,888 \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = -0,888 \text{kN}\cdot\text{m}$$

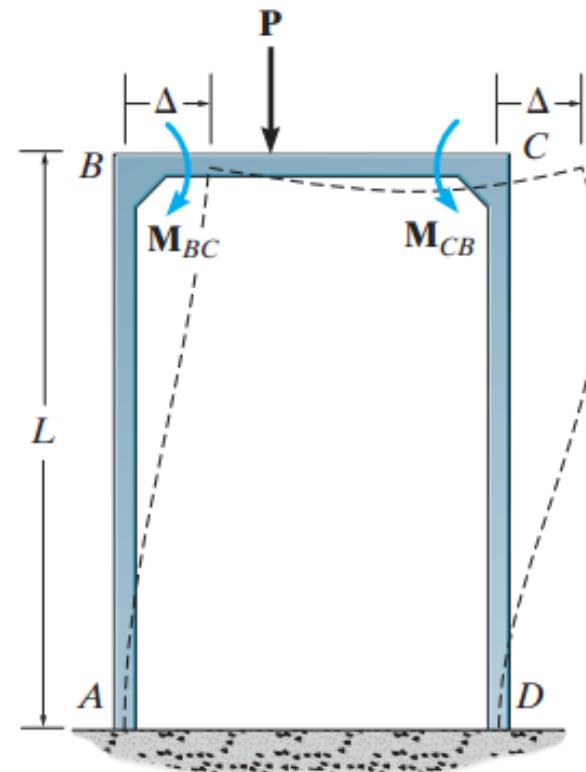
$$M_{CB} = 49,7 \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = 6,18 \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CE} = -55,9 \text{kN}\cdot\text{m}$$

## Analisis Portal Bergoyang Metode Slope-Deflection

- Suatu struktur portal akan bergoyang ke samping apabila geometri atau pembebanan yang terjadi tidak simetri
- Pada portal di samping beban  $P$  menimbulkan momen  $M_{BC}$  dan  $M_{CB}$  pada titik kumpul B dan C
- $M_{BC}$  cenderung memindahkan titik B ke kanan, sedangkan  $M_{CB}$  cenderung memindahkan titik C ke kiri
- Karena  $M_{BC}$  lebih besar daripada  $M_{CB}$  sebagai hasilnya portal akan timbul simpangan sebesar  $\Delta$  ke arah kanan, pada titik B maupun C

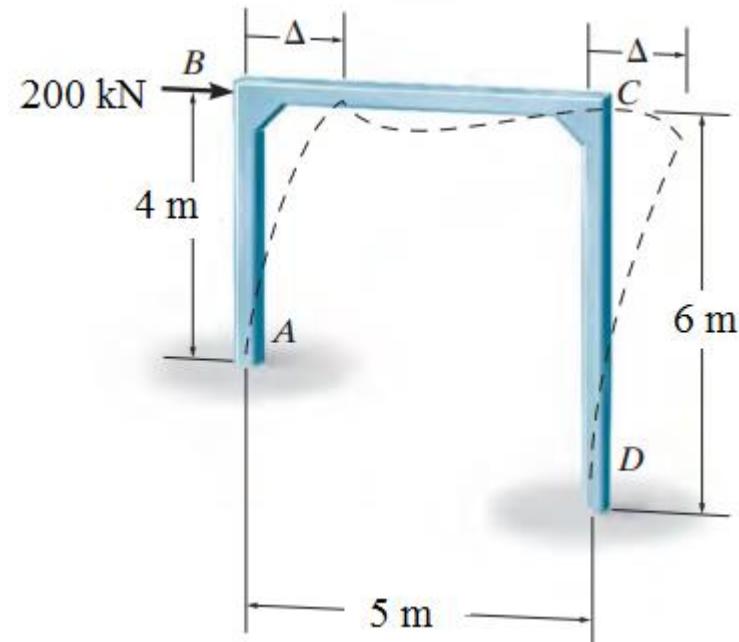


## Analisis Portal Tak Bergoyang Metode Slope-Deflection

### Example 11.7

Tentukan momen pada tiap titik kumpul, anggaplah  $EI$  konstan.

- Struktur termasuk portal bergoyang karena baik geometri dan beban tidak simetri
- Beban bekerja pada titik B, sehingga tidak ada FEM
- Titik B dan C mengalami simpangan sama besar yaitu  $\Delta$
- Sehingga  $\psi_{AB} = \Delta/4$  dan  $\psi_{DC} = \Delta/6$
- Keduanya positif karena batang AB dan CD berotasi searah jarum jam
- $\psi_{AB} = (6/4)\psi_{DC}$



## Analisis Portal Tak Bergoyang Metode Slope-Deflection

### Example 11.7

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{4}\right)\left[2(0) + \theta_B - 3\left(\frac{6}{4}\psi_{DC}\right)\right] + 0 = EI(0,5\theta_B - 2,25\psi_{DC})$$

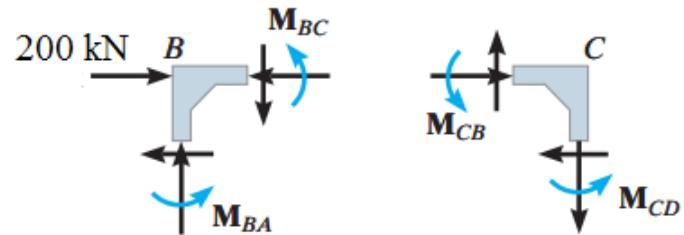
$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{4}\right)\left[2\theta_B + 0 - 3\left(\frac{6}{4}\psi_{DC}\right)\right] + 0 = EI(1,0\theta_B - 2,25\psi_{DC})$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{5}\right)[2\theta_B + \theta_C - 3(0)] + 0 = EI(0,8\theta_B + 0,4\theta_C)$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{4}\right)[2\theta_C + \theta_B - 3(0)] + 0 = EI(0,8\theta_C + 0,4\theta_B)$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2\theta_C + 0 - 3(\psi_{DC})] + 0 = EI(0,667\theta_C - 1,0\psi_{DC})$$

$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2(0) + \theta_C - 3(\psi_{DC})] + 0 = EI(0,333\theta_C - 1,0\psi_{DC})$$

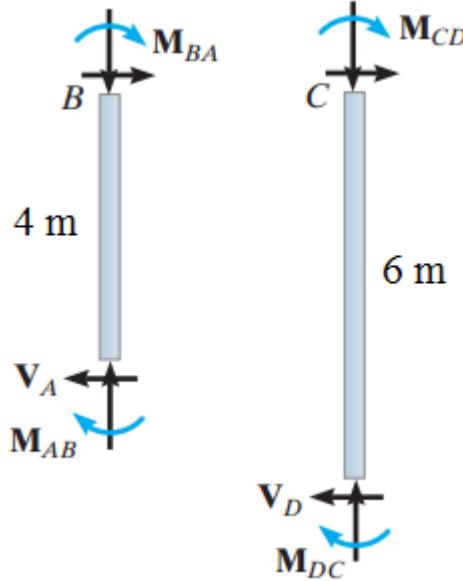


$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

## Analisis Portal Tak Bergoyang Metode Slope-Deflection

### Example 11.7



$$\sum M_B = 0 \quad V_A = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{4}$$

$$\sum M_C = 0 \quad V_D = -\frac{M_{DC} + M_{CD}}{6}$$

$$\sum F_x = 0 \quad 200 - V_A - V_D = 0 \quad \Rightarrow \quad 200 + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{4} + \frac{M_{DC} + M_{CD}}{6} = 0$$

Sehingga diperoleh 3 buah persamaan :

$$\left. \begin{array}{l} 1,8\theta_B + 0,4\theta_C - 2,25\psi_{DC} = 0 \\ 0,4\theta_B + 1,467\theta_C - \psi_{DC} = 0 \\ 1,5\theta_B + 0,667\theta_C - 5,833\psi_{DC} = \frac{800}{EI} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} EI\theta_B = 243,78 \\ EI\theta_C = 75,66 \\ EI\psi_{DC} = 208,48 \end{array}$$

$$M_{AB} = -347 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_{BA} = -225 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{BC} = 225 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_{CB} = 158 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = -158 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_{DC} = -183 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

## Analisis Portal Tak Bergoyang Metode Slope-Deflection

### Example 11.8

Tentukan momen pada tiap titik kumpul, anggaplah EI konstan. A dan D jepit, serta C adalah berupa sendi

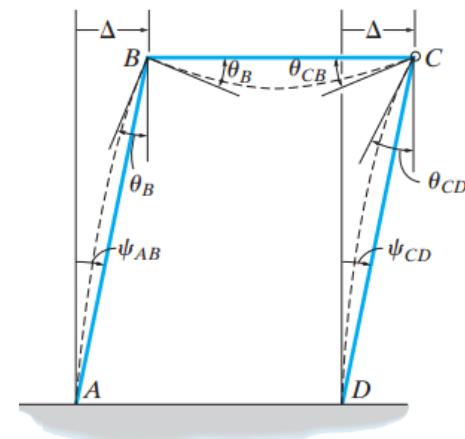
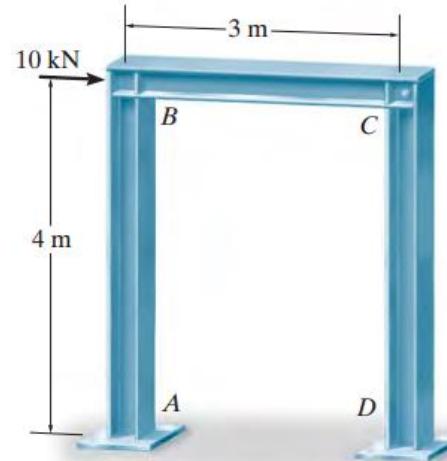
- $\psi = \psi_{AB} = \psi_{DC} = \Delta/4$
- $\theta_A = \theta_D = 0$

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{4}\right)[2(0) + \theta_B - 3\psi] + 0 = 0,5EI\theta_B - 1,5EI\psi$$

$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{4}\right)[2\theta_B + 0 - 3\psi] + 0 = EI\theta_B - 1,5EI\psi$$

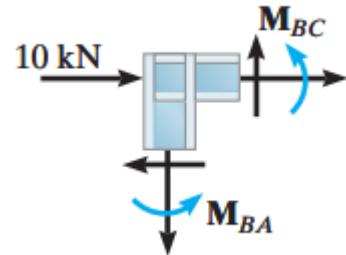
$$M_{BC} = 3E\left(\frac{I}{3}\right)[\theta_B - 0] + 0 = EI\theta_B$$

$$M_{DC} = 3E\left(\frac{I}{4}\right)[0 - \psi] + 0 = -0,75EI\psi$$



## Analisis Portal Tak Bergoyang Metode Slope-Deflection

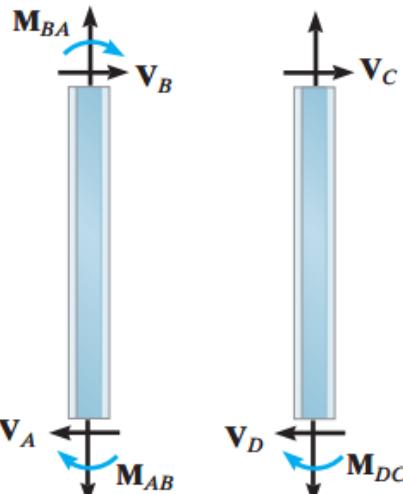
### Example 11.8



$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad V_A = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{4}$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad V_D = -\frac{M_{DC}}{4}$$



$$\Sigma F_x = 0 \quad 10 - V_A - V_D = 0 \quad \Rightarrow \quad 10 + \frac{M_{AB} + M_{BA}}{4} + \frac{M_{DC}}{4} = 0$$

**Substitusikan nilai  $M_{AB}$ ,  $M_{BA}$ ,  $M_{BC}$  dan  $M_{DC}$  sehingga diperoleh**

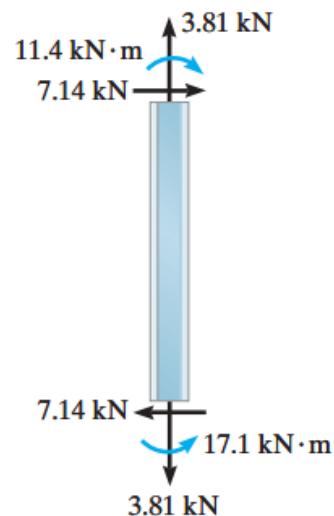
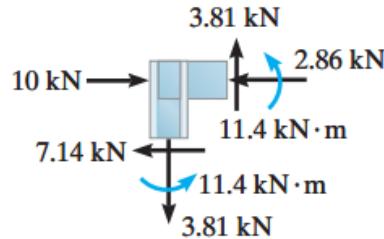
$$\theta_B = \frac{240}{21EI} \quad \psi = \frac{320}{21EI}$$

$$M_{AB} = -17,1 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_{BA} = -11,4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

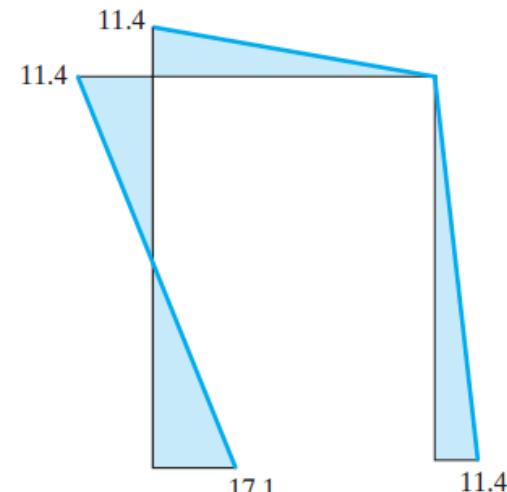
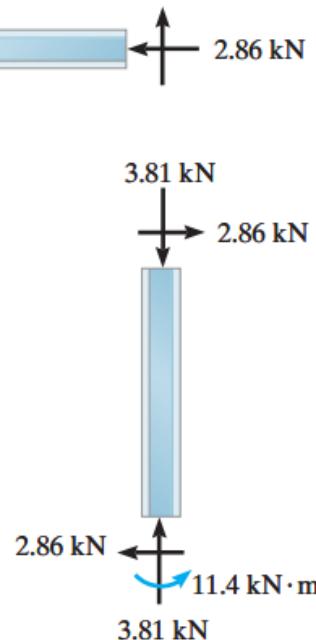
$$M_{BC} = 11,4 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad M_{DC} = -11,4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

## Analisis Portal Tak Bergoyang Metode Slope-Deflection

### Example 11.8



(e)



(f)

## Analisis Portal Tak Bergoyang Metode Slope-Deflection

### Example 11.10

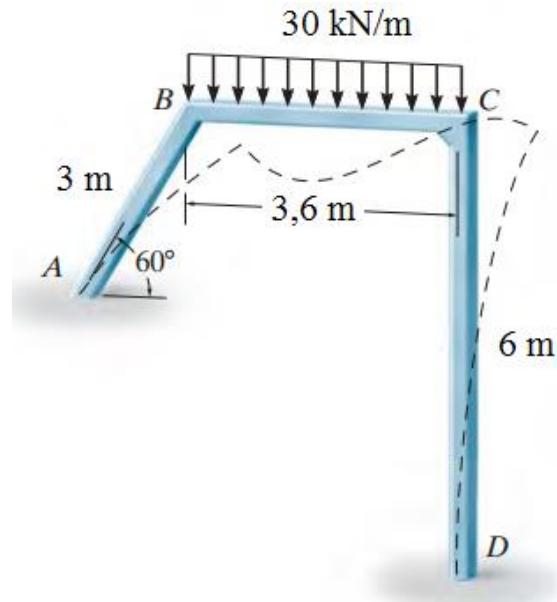
Tentukan momen pada tiap titik kumpul, anggaplah EI konstan.

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{30(3,6)^2}{12} = -32,4 \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$(\text{FEM})_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{30(3,6)^2}{12} = 32,4 \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$\psi_1 = \frac{\Delta_1}{3} \quad \psi_2 = -\frac{\Delta_2}{3,6} \quad \psi_3 = \frac{\Delta_3}{6}$$

$$\Delta_2 = 0,5\Delta_1 \quad \Delta_3 = 0,866\Delta_1 \quad \Rightarrow \psi_2 = -0,417\psi_1 \quad \psi_3 = 0,433\psi_1$$



## Analisis Portal Tak Bergoyang Metode Slope-Deflection

### Example 11.10

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{3}\right)[2(0) + \theta_B - 3\psi_1] + 0$$

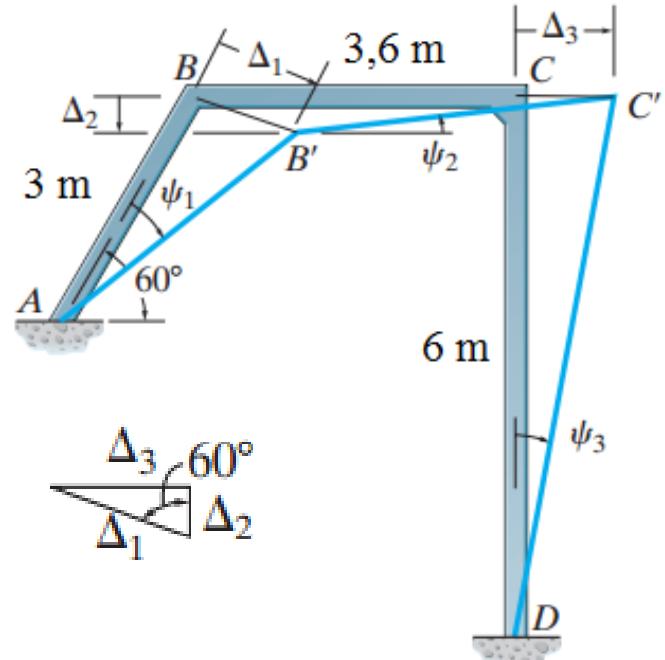
$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{3}\right)[2\theta_B + 0 - 3\psi_1] + 0$$

$$M_{BC} = 2E\left(\frac{I}{3,6}\right)[2\theta_B + \theta_C - 3(-0,417\psi_1)] - 32,4$$

$$M_{CB} = 2E\left(\frac{I}{3,6}\right)[2\theta_C + \theta_B - 3(-0,417\psi_1)] + 32,4$$

$$M_{CD} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2\theta_C + 0 - 3(0,433\psi_1)] + 0$$

$$M_{DC} = 2E\left(\frac{I}{6}\right)[2(0) + \theta_C - 3(0,433\psi_1)] + 0$$



## Analisis Portal Tak Bergoyang Metode Slope-Deflection

### Example 11.10

Dari kesetimbangan momen di titik B dan C :

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

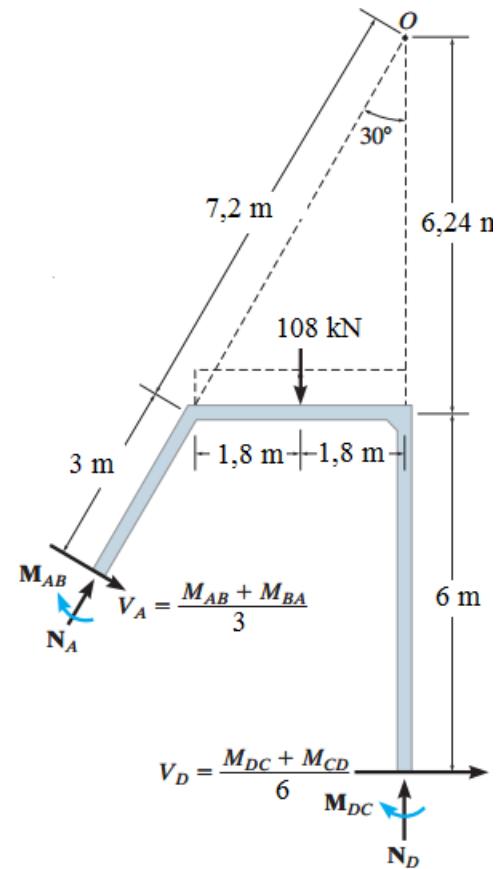
$$M_{CD} + M_{CB} = 0$$

Persamaan ketiga diperoleh dengan mengambil jumlahan momen terhadap O

$$\Sigma M_O = 0$$

$$M_{AB} + M_{DC} - \left( \frac{M_{AB} + M_{BA}}{3} \right)(10,2) - \left( \frac{M_{DC} + M_{CD}}{6} \right)(12,24) - 108(1,8) = 0$$

$$-2,4M_{AB} - 3,4M_{BA} - 2,04M_{CD} - 1,04M_{DC} - 194,4 = 0$$



## Analisis Portal Tak Bergoyang Metode Slope-Deflection

### Example 11.10

Diperoleh 3 buah persamaan :

$$\left. \begin{array}{l} 0,733\theta_B + 0,167\theta_C - 0,392\psi_1 = 9,72/EI \\ 0,167\theta_B + 0,533\theta_C + 0,0784\psi_1 = -9,72/EI \\ -1,840\theta_B - 0,512\theta_C + 3,880\psi_1 = 58,32/EI \end{array} \right\} \begin{array}{l} EI\theta_B = 35,51 \\ EI\theta_C = -33,33 \\ EI\psi_1 = 27,47 \end{array}$$

substitusi kembali ke persamaan awal sehingga diperoleh :

$$M_{AB} = -31,3 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_{BC} = 7,60 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_{CD} = -34,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA} = -7,60 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_{CB} = 34,2 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_{DC} = -23 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

**TUGAS :**

Kerjakan soal dari textbook Bab XI Nomor 11.13 s/d 11.26