STATISTIKA DAN PROBABILITAS (CIV -110)

PERTEMUAN 9

DISTRIBUSI PELUANG KONTINU

UNIVERSITAS PEMBANGUNAN JAYA

JL.CENDRAWASIH NO.1 SAWAH BARU, CIPUTAT 15413 TANGERANG SELATAN

DISKRIT VERSUS KONTINU

VARIABEL DISKRIT

- Pada variable diskrit setiap harga variabel terdapat nilai peluangnya, serta peluang diskrit terbentuk bilamana jumlah semua peluang sama dengan 1.
- Variabel diskrit X menentukan distribusi peluang apabila untuk nilai X= $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$
- nilainya dapat diperoleh dengan cara **membilang** ataupun **menghitung**

VARIABEL KONTINU

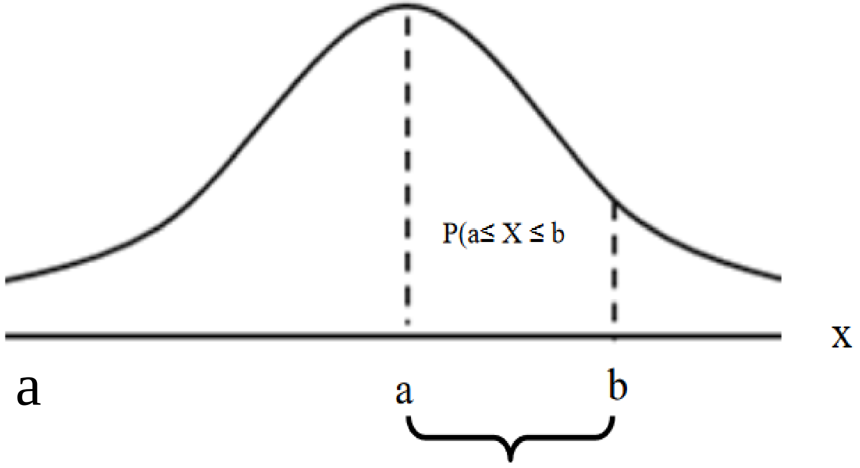
- Variabel acak dikatakan sebagi variable acak kontinu jika memiliki batas $-\sim < X < \sim$
- Variabel acak kontinu nilainya diperoleh dari atau diperoleh dengan cara **mengukur**.

PENDAHULUAN

Variabel acak (random) kontinu adalah yang nilai-nilainya menghubungkan titik-titik dalam sebuah garis, atau didefinisikan sebagai berikut :

Sebuah variabel random adalah yang dapat memuat setiap nilai didalam sebuah interval angka

Distribusi probabilitas dari sebuah variabel acak (random) kontinu X harus memenuhi kondisi sebagai berikut :

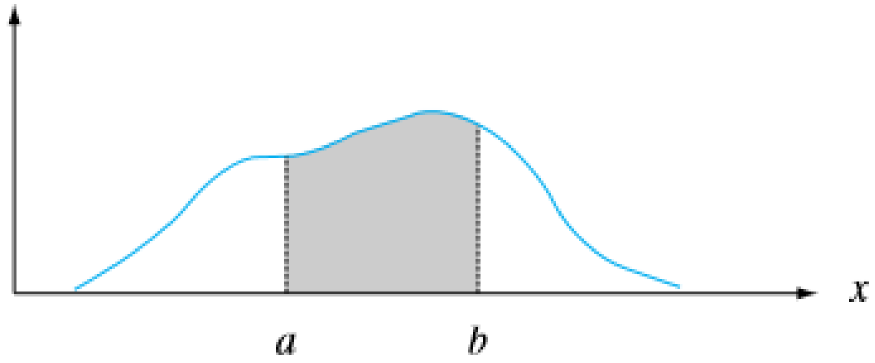


1. F(x) ≥ 0 untuk semua nilai **X**.
2. probabilitas bahwa **X** akan terletak di antara nilai-nilai a dan b sama dengan luas area **f(x)** antara **a** dan **b**.
3. total area di bawah kurva **f(x)** adalah sama dengan **1.00.**

Misalkan **X** = variable acak kontinu, lalu distribusi probabilitas atau ***probability density function*** of **X** adalah fungsi **f(x)** untuk nilai **a** dan **b** dimana **a ≤ b**,

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Maka probabilitas **x** berada pada nilai interval **[a,b]** adalah area di atas interval dan di bawah grafik *density function* (fungsi kerapatan)



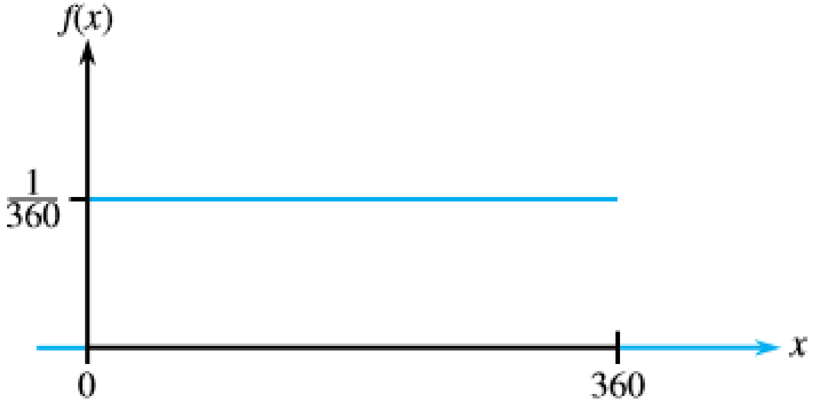
MACAM DISTRIBUSI PELUANG KONTINU

1. **Distribusi seragam**
2. **Distribusi Normal**
3. **Distribusi t – Student**
4. **Distribusi Gamma**
5. **Distribusi *Chi Square***

DISTRIBUSI SERAGAM (*UNIFORM DISTRIBUTION*)

Misalkan jarum yang berputar dalam lingkaran dimana satu linglaran penuh adalah 360^{o}. Asumsikan x adalah sudut yang terbentuk terhadap garis referensi (garis arah utara). Suatu formula kemungkinan densitas dari X adalah :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{360} & 0 \le x < 360 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



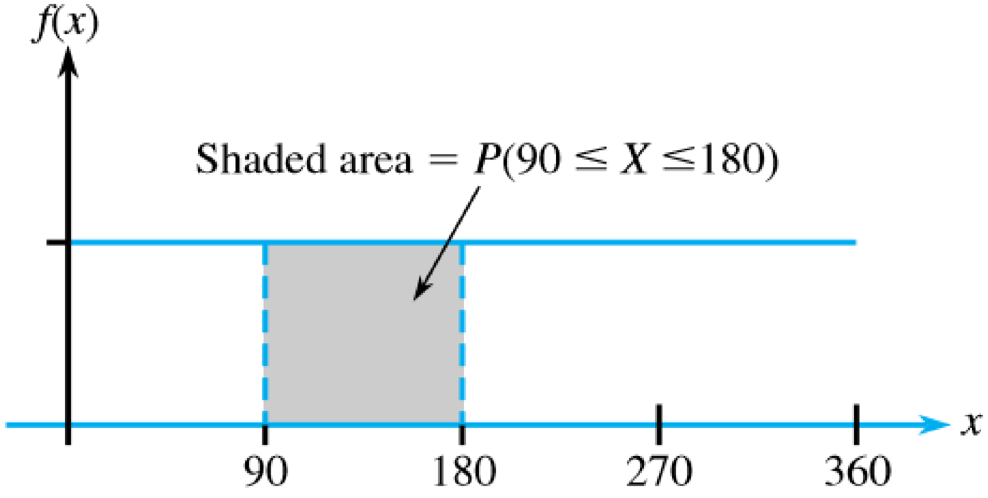
Jelas bahwa f (x) ≥ 0 dan luas dibawah kurva densitas adalah 1/360 * 360 =1

Probabilitas sudut yang terjadi antara 90º dan 180º

$$P(90 \leq X \leq 180) = \int_{90}^{180} \frac{1}{360}\, dx = \frac{x}{360} \Bigg|_{x=90}^{x=180} = \frac{1}{4} = .25$$

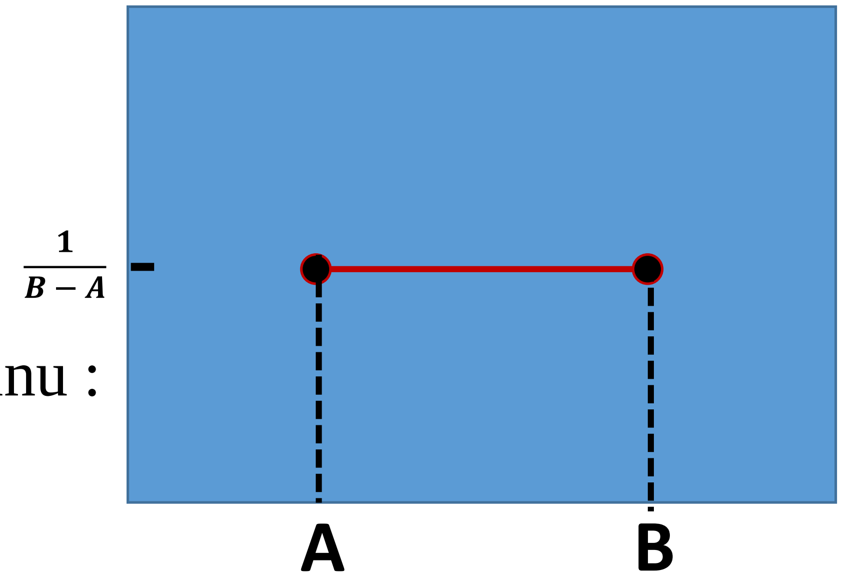
Probabilitas sudut yang terbentuk kurang dari 90º terhadap garis referensi Utara

$$P(0 \leq X \leq 90) + P(270 \leq X < 360) = .25 + .25 = .50$$



Suatu variable acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi seragam pada interval [A,B] jika formula density probability nilai X nya adalah

$$\boldsymbol{f(x;A,B)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{B-A}} & \boldsymbol{A \leq X \leq B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{x\ lainnya} \end{cases}$$



Rataan dan variansi dari distribusi seragam kontinu :

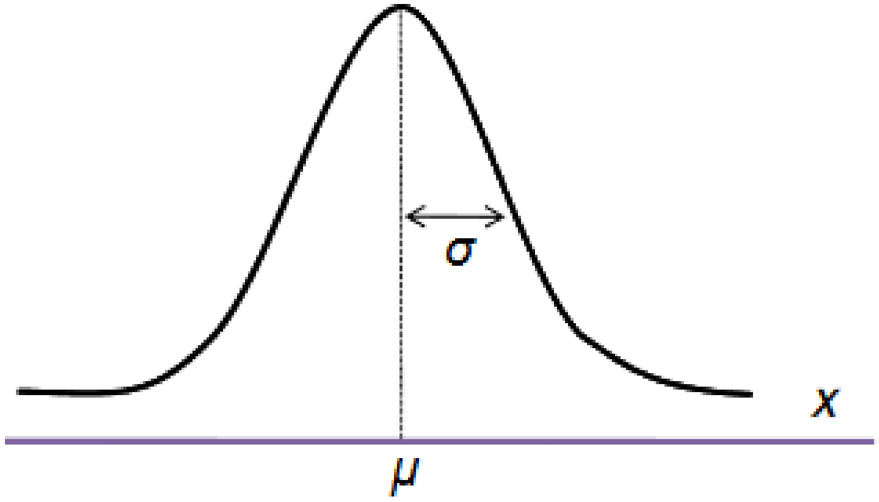
$$\boldsymbol{\mu} = \frac{(\boldsymbol{A+B})}{\mathbf{2}} \qquad \boldsymbol{dan\ \ \sigma^2} = \frac{(\boldsymbol{B-A})^{\mathbf{2}}}{\mathbf{12}}$$

DISTRIBUSI NORMAL

- Distribusi normal adalah distribusi yang paling penting di antara distribusi yang lain. Kurva dari distribusi normal mempunyai bentuk setangkup seperti lonceng:
- Nama lainnya: distribusi Gauss (*Gaussian distribution*)

topi orang Meksiko

6



Lonceng sekolah

Fungsi kerapatan peluang (pdf) dari peubah acak normal X, dengan **rataan μ** dan **variansi σ^2** adalah

$$n(x;\mu,\sigma) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2}, -\infty < x < \infty$$

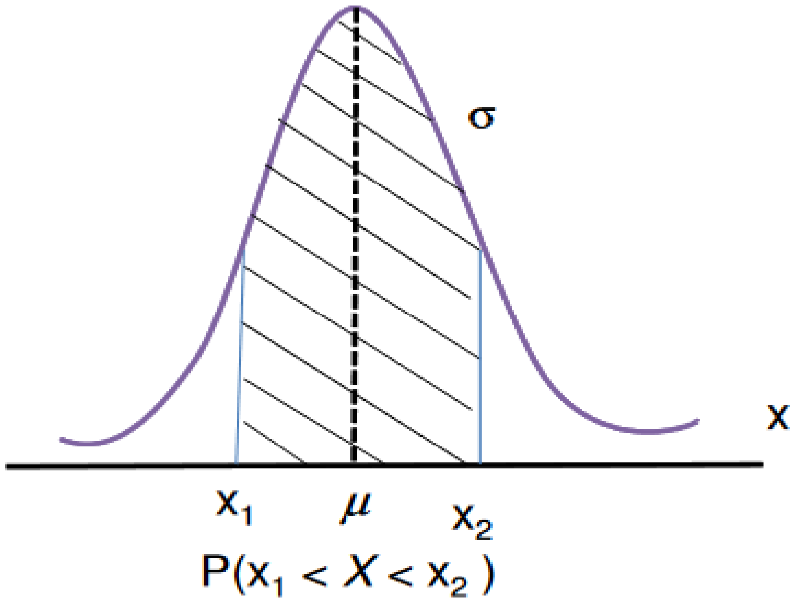
Phi (π) = 3.14159..... dan e = 2.71828....

Sifat kurva normal :

1) Modus = suatu titik yang terletak pada sumbu x yang memiliki nilai maksimum
2) Kurva berbentuk simetris
3) Kedua ujung kurva normal mendekati sumbu datar secara asimptotik bila x bergerak menjauhi μ baik dari arah kiri maupun kanan
4) Luas daerah di bawah kurva adalah 1

Luas Daerah di bawah Kurva Normal

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} n(x;\mu,\sigma)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}\,dx$$



Untuk menghitung luas bidang arsiran dapat menggunakan tabel luas kurva normal

DISTRIBUSI NORMAL BAKU (STANDAR)

- Distribusi normal variable acak kontinu X dengan nilai-nilai parameter **μ** dan **σ** berapapun dapat diubah menjadi distribusi normal kumulatif standard jika variable acak X diubah menjadi variable acak standard Z.
- untuk mengubah distribusi normal → distribusi Normal baku (standard) adalah dengan cara mengurangi nilai-nilai variabel X dengan rata-rata (μ) dan membaginya dengan standard deviasi (σ), sehingga di peroleh variabel baru Z

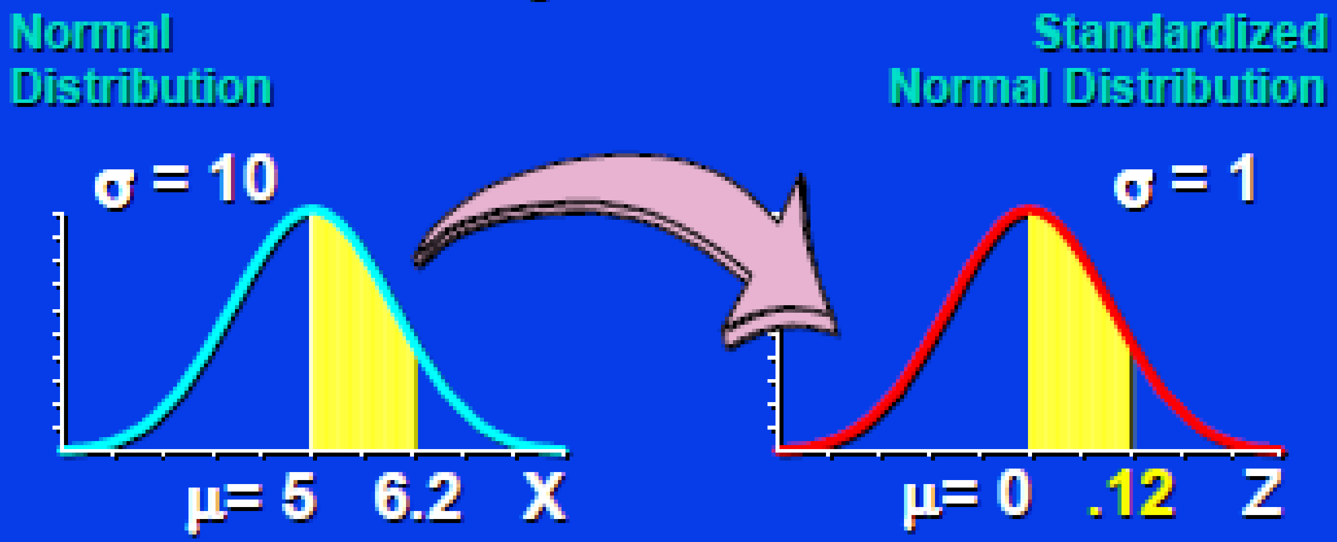
$$\boldsymbol{z = \frac{x - \mu}{\sigma}}$$

Distribusi ini memilki dua sifat penting, yaitu :

- Rata-rata distribusi Z, μ adalah 0
- Deviasi standard Z, adalah 1.

Contoh Standarisasi

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{6.2 - 5}{10} = .12$$



Contoh : **GUNAKAN TABEL KURVA NORMAL BAKU**

1. Jika P(11 ≤ x ≤ 14), dimana mean (μ)= 12 dan standard deviasi (σ)= 2

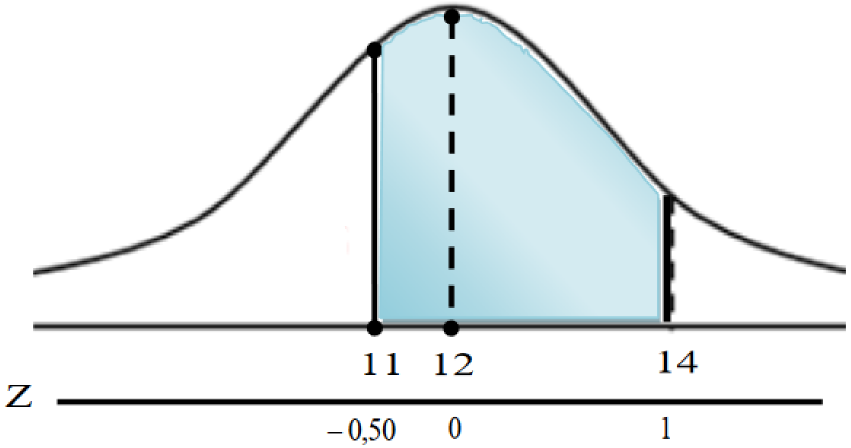
$$P(11 \le x \le 14) = P\left(\frac{11-12}{2} \le x \le \frac{14-12}{2}\right)$$

$$Z_1 = \frac{11-12}{2} = -0.5 \qquad Z_1 = \frac{14-12}{2} = 1$$

Tabel Z_1 = 0.5 ↔ 0.1915 **Tabel Z_2 = 1 ↔ 0.3413**

$$P(11 \le x \le 14) = P(0 \le Z \le 0.5) + P(0 \le Z \le 1.0)$$

$$= 0.1915 + 0.3413 = 0.5328$$



Contoh : GUNAKAN TABEL KUMULATIF KURVA NORMAL BAKU

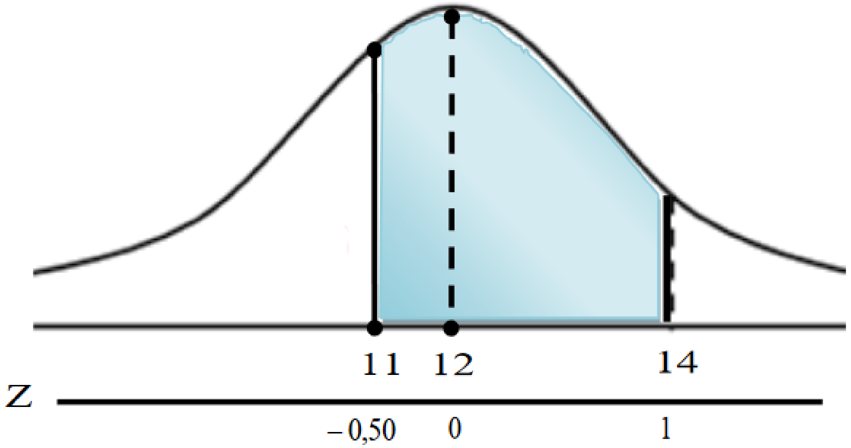
1. Jika P(11 ≤ x ≤ 14), dimana mean (μ)= 12 dan standard deviasi (σ)= 2

$$P(11 \le x \le 14) = P\left(\frac{11-12}{2} \le x \le \frac{14-12}{2}\right)$$

$$Z_1 = \frac{11-12}{2} = -0.5 \qquad Z_1 = \frac{14-12}{2} = 1$$

Tabel $Z_1 = 0.5 \leftrightarrow 0.1915$

Tabel $Z_2 = 1 \leftrightarrow 0.3413$

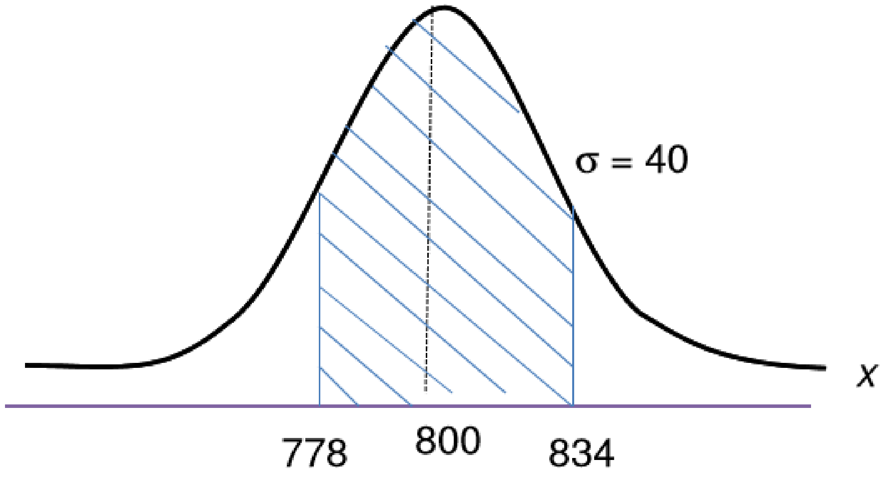


$$P(11 \le x \le 14) = P(Z \le 1.0) - P(\le -0.5)$$

$$= 0.8413 - 0.3085 = 0.5328$$

Contoh :

Suatu perusahaan listrik menghasilkan bola lampu yang umurnya berdistribusi normal dengan rataan 800 jam dan simpangan baku 40 jam, Hitunglah peluang suatu bola lampu dapat menyala antara 778 dan 834 jam



Jawab :

z_1= (778 –800)/40 = -0.55
z_2= (834 –800)/40 = 0.85
dari tabel normal baku diperoleh:
P(778 < X < 834) = P(-0.55 < Z < 0.85) =
P(Z < 0.85) –P(Z < -0.55) = = 0.8023 –0.2912 = 0.5111

DISTRIBUSI T – STUDENT

- Distribusi t dipakai untuk jumlah sampel < 30 , sehingga nilai standar deviasi berfluktuasi relatif besar.

$$f(t) = \frac{K}{\left(1 + \left(\frac{t^2}{n-1}\right)\right)^{\frac{1}{2}n}}$$

K merupakan tetapan yang besarnya tergantung dari besar **n** sedemikian sehingga luas daerah antara kurva fungsi itu dan sumbu t adalah 1.

Bilangan n-1 disebut **derajat kebebasan (dk)**, yaitu kemungkinan banyak pilihan dari sejumlah objek yang diberikan.
Misalnya kita mempunyai dua objek yaitu A dan B. Dari dua objek ini kita hanya mungkin melakukan 1 kali pilihan saja, A dan B. Seandainya terpilih A maka B tidak usah dipilih lagi. Dan untuk itu dk = 2 – 1 = 1.

Untuk merubah distribusi normal → distribusi t digunakan rumus :

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

x = nilai rata-rata sampel

µ = nilai rata-rata populasi

S= standar deviasi sampel

n = banyak sampel

Sifat Distribusi t

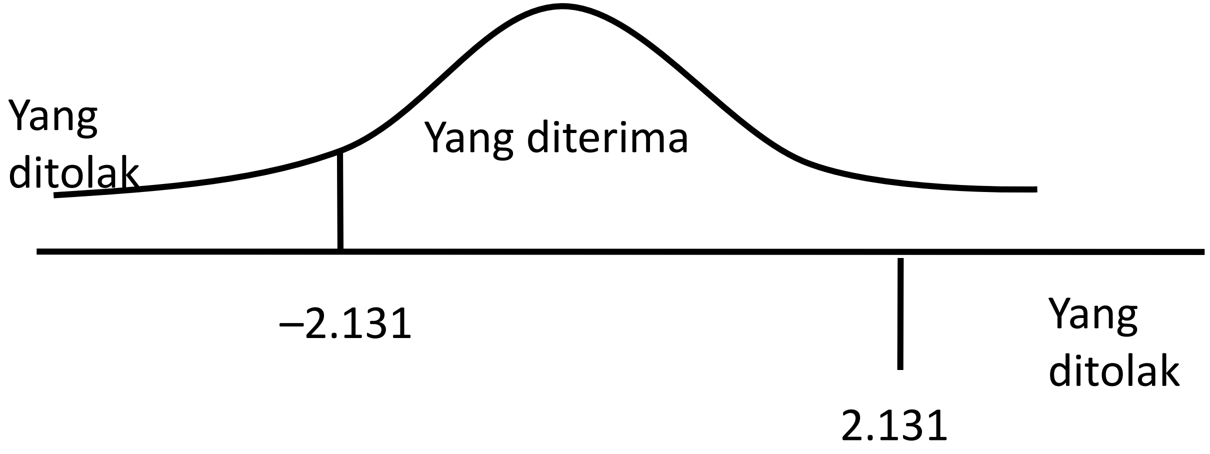
Mempunyai rata-rata sama dengan nol tetapi dengan standar deviasi yang berbeda beda sesuai dengan besarnya sampel . Semakin besar sampel maka semakin mendekati distribusi normal

Contoh :

Kereta api eksekutif jurusan malang, surabaya dan yogya berjumlah 24 unit. Harga rata-rata tiket Rp.253.000,-.Karena persaingan dengan perusahaan penerbangan agar penumpang tidak turun drastis maka diberikan diskon. Harga tiket rata-rata setelah didiskon dari 16 jenis tiket adalah Rp.212.000,- dengan standar devisi Rp.46.000,-. Apakah penurunan tarif tersebut untuk tingkat signifikan 5% memberikan perbedaan yang nyata.

Jawab :

- Harga awal Rp.253.000,-.
- Harga berubah ≠ Rp 253.000,-
- Tanda ≠ menandakan kondisi 2 arah
- V = n – 1 = 16 – 1 = 15 dengan α = 5% diperoleh t tabel = 2,131
- t hitung =3,57



Terdapat perbedaan yang signifikan

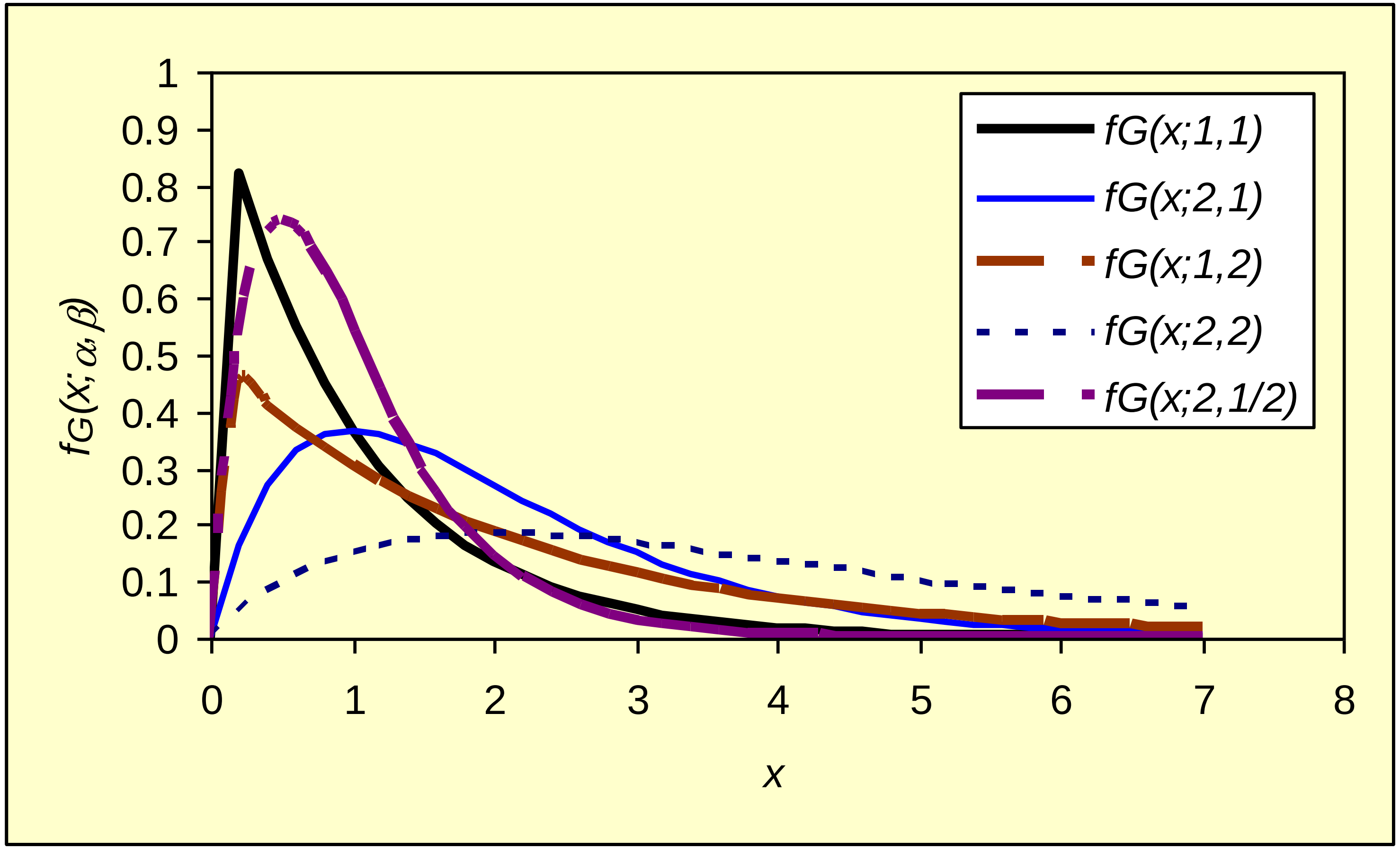
DISTRIBUSI GAMMA DAN EKSPONENSIAL

- Tidak selamanya distribusi normal dapat digunakan untuk memecahkan masalah teknik dan sains.
- Contohnya dalam teori antrian dan keandalan, kurang tepat bila digunakan pendekatan dengan distribusi normal, distribusi eksponensial dan Gamma lebih tepat menjadi solusinya.
- Distribusi eksponensial adalah sebuah kasus distribusi Gamma.

Fungsi gamma didefinisikan sebagai :

$$\boldsymbol{\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx}$$

$\alpha = n, maka\ \Gamma(n) = (n-1)!$



Gambar Fungsi Kepadatan Probabilitas Distribusi Gamma

- Jika parameter skala sebuah distribusi gamma $b = 1$ diperoleh suatu distribusi gamma standard. Maka jika X adalah variabel acak kontinu dari distribusi gamma standard fungsi kepadatan probabilitasnya adalah:

$$f_G(x;\alpha) \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} & x \geq 0 \\ 0 & x \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

Sedangkan fungsi distribusi kumulatif gamma standard adalah:

$$F_G = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{\Gamma(\alpha)}\,dt$$

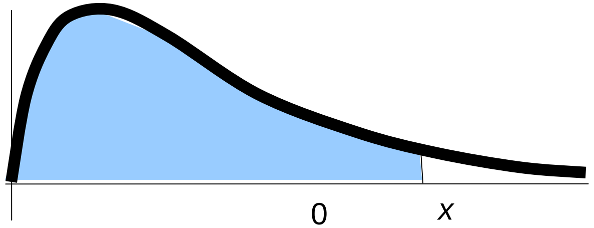
Fungsi ini dapat digunakan untuk menghitung probabilitas dari suatu distribusi gamma yang tidak standard karena untuk sebuah variabel acak kontinu X yang memiliki distribusi gamma dengan parameter α dan β berlaku hubungan:

$$P(X \leq x) = F_G(x;\alpha;\beta) = F_G\left(\frac{x}{\beta};\alpha\right)$$

Tabel 6.2 Distribusi Kumulatif Gamma Standard

Luas daerah arsiran:

$$F_G(x;\alpha) = P(X \le x) = \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{\Gamma(\alpha)}\,dt$$



x	α = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.5	0.3935	0.0902	0.0144	0.0018	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.0	0.6321	0.2642	0.0803	0.0190	0.0037	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
1.5	0.7769	0.4422	0.1912	0.0656	0.0186	0.0045	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000
2.0	0.8647	0.5940	0.3233	0.1429	0.0527	0.0166	0.0045	0.0011	0.0002	0.0000
2.5	0.9179	0.7127	0.4562	0.2424	0.1088	0.0420	0.0142	0.0042	0.0011	0.0003
3.0	0.9502	0.8009	0.5768	0.3528	0.1847	0.0839	0.0335	0.0119	0.0038	0.0011
3.5	0.9698	0.8641	0.6792	0.4634	0.2746	0.1424	0.0653	0.0267	0.0099	0.0033
4.0	0.9817	0.9084	0.7619	0.5665	0.3712	0.2149	0.1107	0.0511	0.0214	0.0081
4.5	0.9889	0.9389	0.8264	0.6577	0.4679	0.2971	0.1689	0.0866	0.0403	0.0171
5.0	0.9933	0.9596	0.8753	0.7350	0.5595	0.3840	0.2378	0.1334	0.0681	0.0318
5.5	0.9959	0.9734	0.9116	0.7983	0.6425	0.4711	0.3140	0.1905	0.1056	0.0538
6.0	0.9975	0.9826	0.9380	0.8488	0.7149	0.5543	0.3937	0.2560	0.1528	0.0839
6.5	0.9985	0.9887	0.9570	0.8882	0.7763	0.6310	0.4735	0.3272	0.2084	0.1226
7.0	0.9991	0.9927	0.9704	0.9182	0.8270	0.6993	0.5503	0.4013	0.2709	0.1695

7.5	0.9994	0.9953	0.9797	0.9409	0.8679	0.7586	0.6218	0.4754	0.3380	0.2236
8.0	0.9997	0.9970	0.9862	0.9576	0.9004	0.8088	0.6866	0.5470	0.4075	0.2834
8.5	0.9998	0.9981	0.9907	0.9699	0.9256	0.8504	0.7438	0.6144	0.4769	0.3470
9.0	0.9999	0.9988	0.9938	0.9788	0.9450	0.8843	0.7932	0.6761	0.5443	0.4126
9.5	0.9999	0.9992	0.9958	0.9851	0.9597	0.9115	0.8351	0.7313	0.6082	0.4782
10.0	1.0000	0.9995	0.9972	0.9897	0.9707	0.9329	0.8699	0.7798	0.6672	0.5421
10.5	1.0000	0.9997	0.9982	0.9929	0.9789	0.9496	0.8984	0.8215	0.7206	0.6029
11.0	1.0000	0.9998	0.9988	0.9951	0.9849	0.9625	0.9214	0.8568	0.7680	0.6595
11.5	1.0000	0.9999	0.9992	0.9966	0.9893	0.9723	0.9397	0.8863	0.8094	0.7112
12.0	1.0000	0.9999	0.9995	0.9977	0.9924	0.9797	0.9542	0.9105	0.8450	0.7576
12.5	1.0000	0.9999	0.9997	0.9984	0.9947	0.9852	0.9654	0.9302	0.8751	0.7986
13.0	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9963	0.9893	0.9741	0.9460	0.9002	0.8342
13.5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9974	0.9923	0.9807	0.9585	0.9210	0.8647
14.0	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9982	0.9945	0.9858	0.9684	0.9379	0.8906
14.5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9988	0.9961	0.9895	0.9761	0.9516	0.9122
15.0	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9972	0.9924	0.9820	0.9626	0.9301
15.5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9945	0.9865	0.9712	0.9448
16.0	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9960	0.9900	0.9780	0.9567
16.5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9971	0.9926	0.9833	0.9663
17.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9979	0.9946	0.9874	0.9739

Beberapa ukuran statistic deskripsi untuk distribusi gamma

Mean (nilai harapan) → $\mu_x = E(X) = \nu$

Varians → $\sigma_x^2 = 2\nu$

Kemencengan (skewness) → $\beta_1 = \alpha_3^2 = \frac{8}{\nu}$

Keruncingan (kurtosis) → $\beta_2 = \alpha_4 = 3\left(\frac{4}{\nu} + 1\right)$

Contoh soal :

Misalkan variabel acak kontinu X yang menyatakan ketahanan suatu bantalan peluru (dalam ribuan jam) yang diberi pembebanan dinamik pada suatu putaran kerja tertentu mengikuti suatu distribusi gamma dengan $\alpha = 8$ dan $\beta = 15$,

Maka probabilitas sebuah bantalan peluru dapat digunakan selama <u>60 ribu sampai 120 ribu jam</u> dengan pembenan dinamik pada putaran kerja tersebut adalah:

$$\boldsymbol{P(60 \le X \le 120) = P(X \le 120) - P(X \le 60)}$$

$$\boldsymbol{= F_G\ (120; 8; 15) - F_G(60; 8; 15)}$$

$$\boldsymbol{= F_G\ (120/15; 8;) - F_G(60/15; 8;)}$$

$$\boldsymbol{= F_G\ (8; 8;) - F_G(4; 8;) = 0.5470 - 0.0511 = 0.4959}$$

- Beberapa ukuran statistik deskriptif distribusi gamma di atas adalah:

Mean : $\mu_x = E(X) = \alpha\beta = (8)(15) = 120$

Varians : $\sigma_x^2 = \alpha\beta^2 = (8)(15^2) = 1800 \rightarrow \sigma_x = 42,43$

Kemencengan : $\beta_1 = \alpha_3^2 = \frac{4}{\alpha} = \frac{4}{8} = 0,5$

Keruncingan : $\beta_2 = \alpha_4 = \frac{6}{\alpha} + 3 = \frac{6}{8} + 3 = 3,75$

DISTRIBUSI CHI – KUADRAT (χ^2)

- Distribusi chi-kuadrat merupakan distribusi yang banyak digunakan dalam sejumlah prosedur **statistik inferensial**. Distribusi chi-kuadrat merupakan kasus khusus dari ***distribusi gamma*** dengan faktor bentuk $\boldsymbol{\alpha}$ = $\boldsymbol{v}$**/2**, dimana **v** adalah bilangan bulat positif dan faktor skala $\boldsymbol{\beta}$ **= 2.**

- Peubah acak kontinu X mempunyai distribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan **v**,bila fungsi padat peluangnya diberikan oleh:

$$\boldsymbol{f(x)} \begin{cases} \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{v}/\mathbf{2}}\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{v}/\mathbf{2})}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{v}/\mathbf{2}-\mathbf{1}}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}/\mathbf{2}}, \boldsymbol{x} > \mathbf{0} \\ \textbf{0, untuk x lainnya} \end{cases}$$

- Rataan dan variansi distribusinya adalah **μ= v** dan **σ² = 2v**