Universitas Pembangunan Jaya

Integrity, Professionalism, & Entrepreneurship

Mata Kuliah : Analisis Struktur
Kode : CIV – 209
SKS : 4 SKS

Analisis Struktur Statis Tak Tentu dengan Force Method

Pertemuan – 9, 10, 11

- Kemampuan Akhir yang Diharapkan
  - Mahasiswa dapat melakukan analisis struktur statis tak tentu dengan metode Force Method
- Sub Pokok Bahasan :
  - Struktur Statis Tak Tentu
  - Prosedur Umum Analisis Dengan Force Method
  - Hukum Maxwell-Betti
  - Force Method Untuk Struktur Balok
  - Force Method Untuk Portal
  - Force Method Untuk Rangka Batang

Struktur Statis Tak Tentu

- Sebuah struktur apapun jenisnya dapat diklasifikasikan sebagai struktur statis tak tentu apabila jumlah reaksi tumpuan yang tak diketahui atau gaya-gaya dalamnya melebihi jumlah persamaan kesetimbangan yang tersedia untuk keperluan analisis
- Sebagian besar struktur yang dihasilkan saat ini merupakan struktur statis tak tentu
- Struktur beton hampir selalu merupakan struktur statis tak tentu, karena pada umumnya elemen balok dan kolom dicor secara monolit menjadi satu kesatuan

Struktur Statis Tak Tentu

Advantages	Disadvantages
Tegangan maksimum dan defleksi lebih kecil daripada struktur statis tertentu	Biaya fabrikasi yang tinggi
Memiliki tendensi untuk redistribusi beban jika terjadi overloading	Ada tegangan tambahan yang harus diperhitungkan akibat deformasi yang disebabkan oleh penurunan tumpuan, perubahan panjang elemen, perubahan temperatur, kesalahan fabrikasi dll.
Dapat memikul beban dengan elemen yang lebih tipis	
Memiliki stabilitas yang lebih baik daripada statis tertentu	

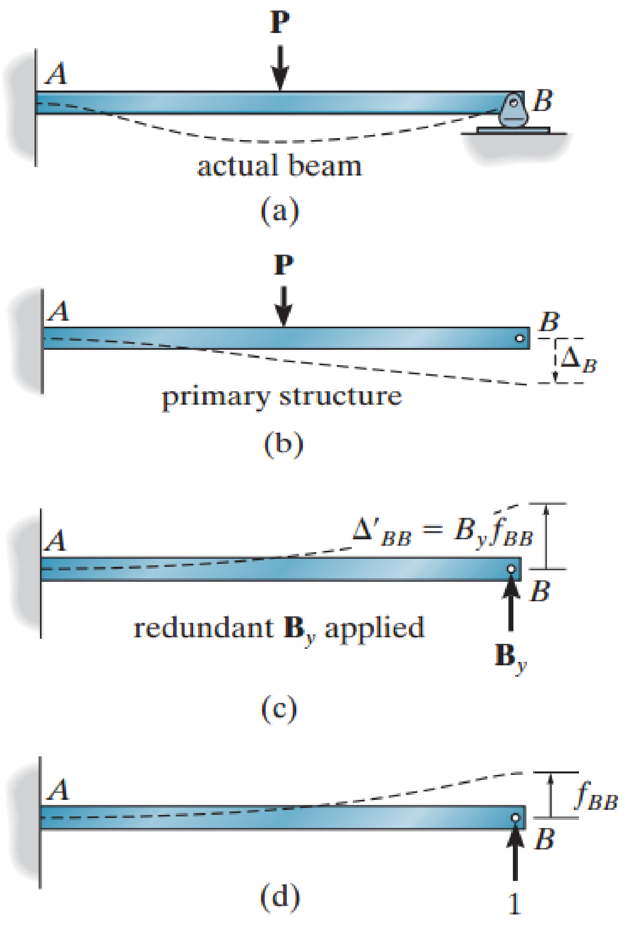
Struktur Statis Tak Tentu

Factor	Force /Flexibility Method	Displacement/Stiffness Method
Variabel	Gaya (Force)	Perpindahan (Displacement)
Persamaan Yang Digunakan	Compatibility + Force-Displacement	Equilibrium + Force-Displacement
Koefisien Variabel	Koefisien Fleksibilitas	Koefisien Kekakuan

Force Method was originally developed by James Clerk Maxwell in 1864 and later refined by Otto Mohr and Heinrich Muller-Breslau.

Prosedur Umum Analisis Dengan Force Method

- Perhatikan balok dalam Fig. 10.3(a)
- Dari free-body diagram, ada 4 reaksi tumpuan yang belum diketahui
- Persamaan kesetimbangan hanya ada 3
- Balok merupakan struktur statis tak tentu derajat satu
- Satu persamaan tambahan diperoleh dengan menggunakan prinsip superposisi serta mempertimbangkan kompatibilitas displacement pada salah satu tumpuan
- Pilih salah satu tumpuan sebagai reaksi lebih (redundant) dan pindahkan sementara sehingga tidak berpengaruh pada balok
- Balok menjadi statis tertentu



Prosedur Umum Analisis Dengan Force Method

- Dalam contoh ini akan dihilangkan dahulu tumpuan B
- Sebagai hasilnya, beban *P* akan mengakibatkan B berpindah ke bawah seperti pada Fig. 10.3(b), sebesar Δ_B.
- Dengan prinsip superposisi, reaksi tumpuan di B, B_y akan mengakibatkan titik B berpindah ke atas sebesar Δ'_{BB}, Fig. 10.3(c).
- Asumsikan perpindahan ke atas bernilai positif, maka dapat dituliskan persamaan kompatibilitas pada titik B :

$$0 = -\Delta_B + \Delta'_{BB}$$

- Akibat beban 1 satuan vertikal ke atas, titik B akan berpindah sebesar f_{BB}, sehingga akibat reaksi B_y, akan timbul displacement $\Delta'_{BB} = B_y f_{BB}$, persamaan kompatibilitas akan menjadi :

$$0 = -\Delta_B + B_y f_{BB}$$

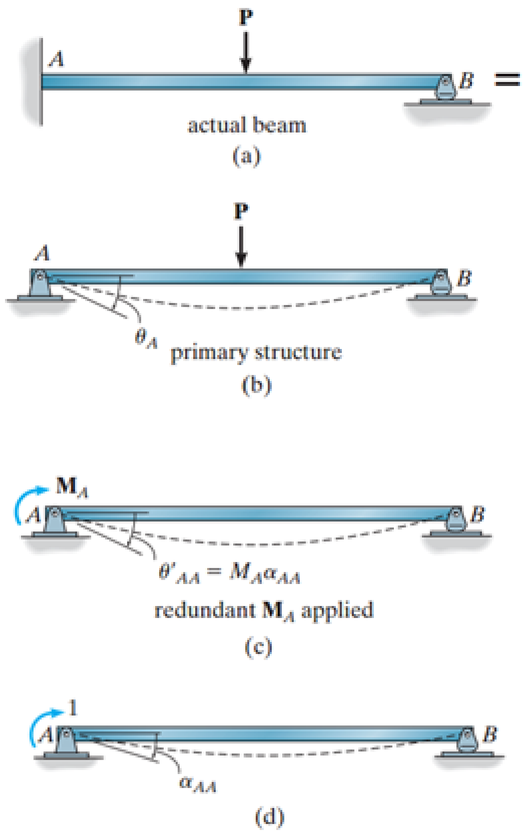
Prosedur Umum Analisis Dengan Force Method

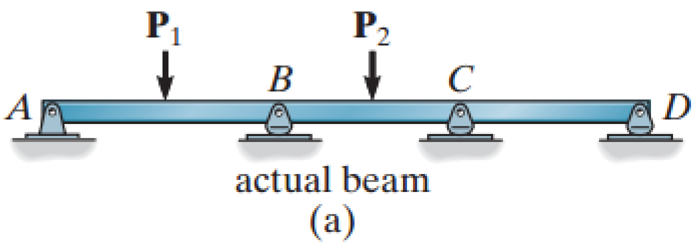
- Dengan menggunakan metode-metode perhitungan lendutan pada Chapter 8 atau 9, maka Δ_B and f_{BB}, dapat dihitung, sehingga reaksi tumpuan B_y dapat dihitung pula
- Reaksi tumpuan di A selanjutnya dapat dihitung pula dengan persamaan kesetimbangan yang ada
- Tidak ada persyaratan khusus untuk pemilihan reaksi lebih (redundant)
- Sebagai contoh momen di A, Fig. 10.4(a) dapat ditentukan dengan cara menghilangkan kapasitas pemikul momen pada tumpuan A (yaitu dengan mengganti tumpuan jepit menjadi sendi)
- Seperti pada Fig .10.4(b), rotasi pada A oleh beban P adalah θ_A.
- Reaksi lebih M_A mengakibatkan sudut rotasi di A sebesar θ'_{AA}, Fig. 10.4(c).
- Karena $\theta'_{AA} = M_A\alpha_{AA}$, maka persamaan kompatibilitas menjadi :

$$0 = \theta_A + M_A\alpha_{AA}$$

Prosedur Umum Analisis Dengan Force Method

- Fig 10.4





= ???

Hukum Maxwell-Betti

- *The displacement of a point B on a structure due to a unit load acting at point A is equal to the displacement of point A when the load is acting at point B.*
- *The rotation at point B on a structure due to a unit couple moment acting at point A is equal to the rotation at point A when the unit couple is acting at point B.*

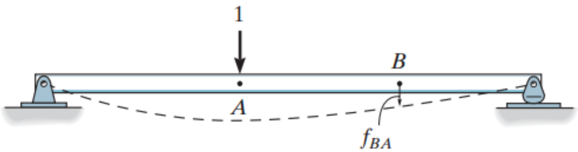
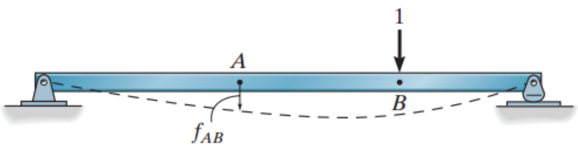
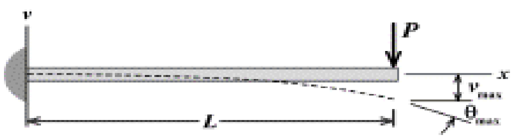
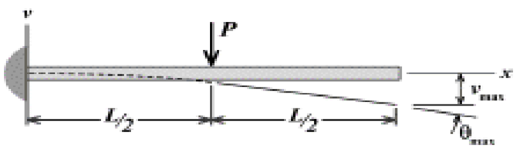
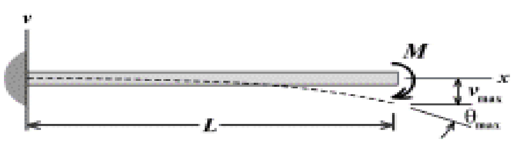
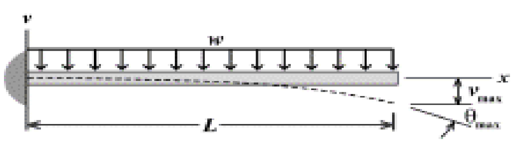
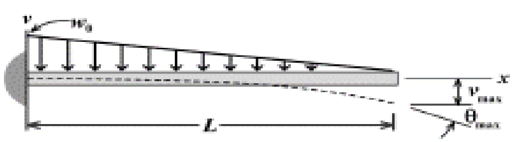
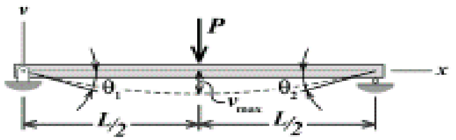
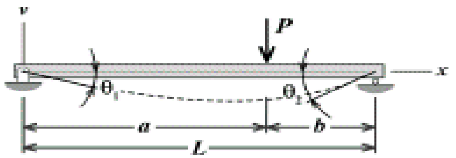
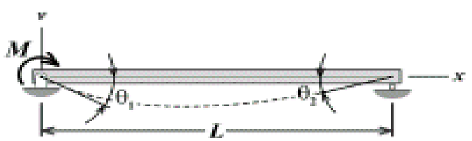
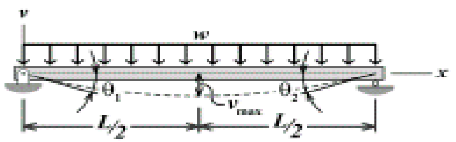
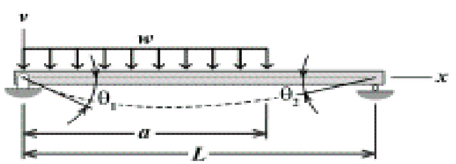
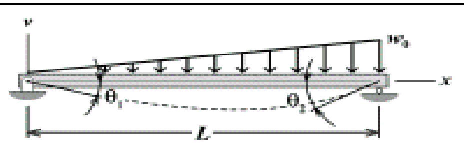


Fig. 10–6



CANTILEVER BEAMS			
Beam	**Slope**	**Deflection**	**Elastic Curve**
	19 $\theta_{max} = -\dfrac{PL^2}{2EI}$	20 $v_{max} = -\dfrac{PL^3}{3EI}$	21 $v = -\dfrac{Px^2}{6EI}(3L - x)$
	22 $\theta_{max} = -\dfrac{PL^2}{8EI}$	23 $v_{max} = -\dfrac{5PL^3}{48EI}$	24 $v = -\dfrac{Px^2}{12EI}(3L - 2x)$ for $0 \le x \le L/2$ $v = -\dfrac{PL^2}{48EI}(6x - L)$ for $L/2 \le x \le L$
	25 $\theta_{max} = -\dfrac{ML}{EI}$	26 $v_{max} = -\dfrac{ML^2}{2EI}$	27 $v = -\dfrac{Mx^2}{2EI}$
	28 $\theta_{max} = -\dfrac{wL^3}{6EI}$	29 $v_{max} = -\dfrac{wL^4}{8EI}$	30 $v = -\dfrac{wx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2)$
	31 $\theta_{max} = -\dfrac{w_0L^3}{24EI}$	32 $v_{max} = -\dfrac{w_0L^4}{30EI}$	33 $v = -\dfrac{w_0x^2}{120LEI}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$

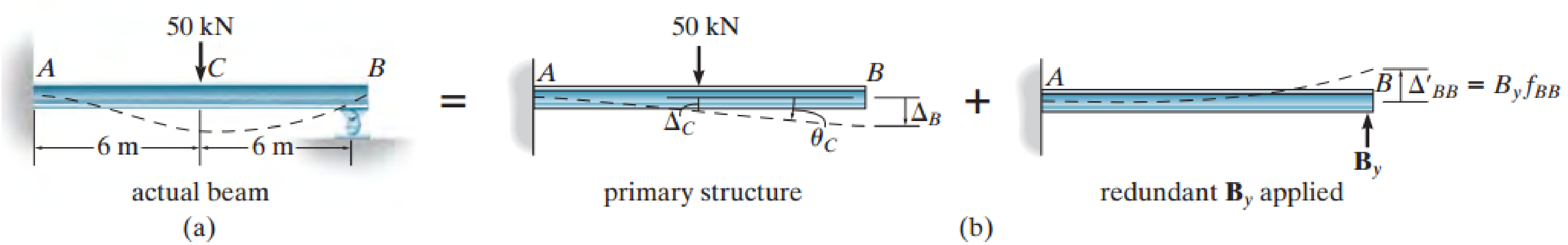
SIMPLY SUPPORTED BEAMS

Beam	Slope	Deflection	Elastic Curve
	1 $\theta_1 = -\theta_2 = -\dfrac{PL^2}{16EI}$	2 $v_{max} = -\dfrac{PL^3}{48EI}$	3 $v = -\dfrac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ for $0 \le x \le L/2$
	4 $\theta_1 = -\dfrac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI}$ $\theta_2 = +\dfrac{Pa(L^2 - a^2)}{6LEI}$	5 $v = -\dfrac{Pa^2b^2}{3LEI}$ at $x = a$	6 $v = -\dfrac{Pbx}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2)$ for $0 \le x \le a$
	7 $\theta_1 = -\dfrac{ML}{3EI}$ $\theta_2 = +\dfrac{ML}{6EI}$	8 $v_{max} = -\dfrac{ML^2}{9\sqrt{3}\,EI}$ at $x = L\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	9 $v = -\dfrac{Mx}{6LEI}(2L^2 - 3Lx + x^2)$
	10 $\theta_1 = -\theta_2 = -\dfrac{wL^3}{24EI}$	11 $v_{max} = -\dfrac{5wL^4}{384EI}$	12 $v = -\dfrac{wx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$
	13 $\theta_1 = -\dfrac{wa^2}{24LEI}(2L - a)^2$ $\theta_2 = +\dfrac{wa^2}{24LEI}(2L^2 - a^2)$	14 $v = -\dfrac{wa^3}{24LEI}(4L^2 - 7aL + 3a^2)$ at $x = a$	$v = -\dfrac{wx}{24LEI}(Lx^3 - 4aLx^2 + 2a^2x^2 + 4a^2L^2$ $- 4a^3L + a^4)$ for $0 \le x \le a$ $v = -\dfrac{wa^2}{24LEI}(2x^3 - 6Lx^2 + a^2x + 4L^2x - a^2L)$ 15 for $a \le x \le L$
	16 $\theta_1 = -\dfrac{7w_0L^3}{360EI}$ $\theta_2 = +\dfrac{w_0L^3}{45EI}$	17 $v_{max} = -0.00652\dfrac{w_0L^4}{EI}$ at $x = 0.5193L$	18 $v = -\dfrac{w_0x}{360LEI}(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)$

Force Method Untuk Struktur Balok

Example 10.1

Tentukan reaksi tumpuan dari struktur berikut, *EI* dianggap konstan



- Dari pengamatan, balok adalah struktur statis tak tentu derajat satu
- B_y diambil sebagai reaksi redundan
- Fig. 10.8(b) menunjukkan prinsip superposisi
- Asumsikan B_y bekerja ke atas pada balok

Force Method Untuk Struktur Balok

Example 10.1

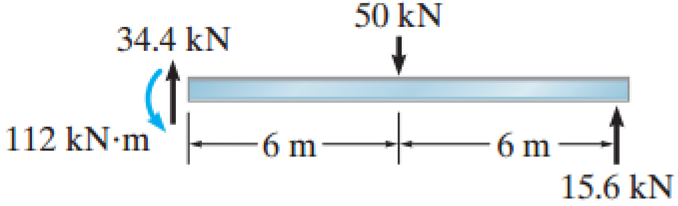
$$(+\uparrow)\ 0 = -\Delta_B + B_y f_{BB} \qquad (1)$$

Δ_B dan f_{BB} dapat diperoleh dari tabel

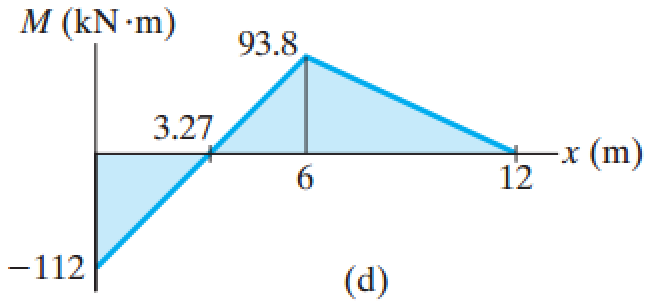
$$\Delta_B = \frac{9000kNm^3}{EI}; \quad f_{BB} = \frac{576m^3}{EI}$$

Substitusi ke persamaan (1) :

$$0 = -\frac{9000}{EI} + B_y \frac{576}{EI} \Rightarrow B_y = 15.6kN$$



(c)



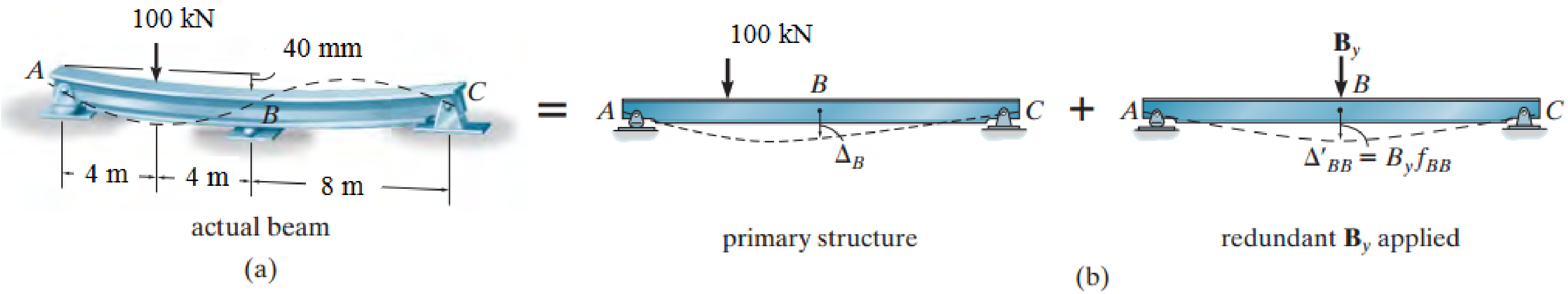
(d)

Gambarkan diagram gaya lintang dan momen lentur dari balok.

Force Method Untuk Struktur Balok

Example 10.2

Gambarkan diagram gaya lintang dan momen lentur untuk balok pada Fig. 10-9a. Tumpuan B turun 40 mm. E = 200 GPa, dan I = $500 \cdot 10^6$ mm^4



– Dari pengamatan, balok adalah struktur statis tak tentu derajat satu
– B_y diambil sebagai reaksi redundan dianggap bekerja ke bawah
– Persamaan kompatibilitas dituliskan :

$$40 \text{ mm} = \Delta_B + B_y f_{BB}$$

TUGAS :

Kerjakan soal dari textbook Bab X Nomor **10.1 s/d 10.18**

Force Method Untuk Portal

- Force method merupakan metode analisis yang sangat berguna untuk menyelesaikan permasalahan struktur portal statis tak tentu satu tingkat atau struktur dengan geometri yang spesifik seperti portal gable
- Untuk struktur portal dengan jumlah tingkat lebih dari satu (atau memiliki derajat ketaktentuan yang tinggi) akan lebih mudah diselesaikan dengan metode *slope-deflection* atau metode momen distribusi

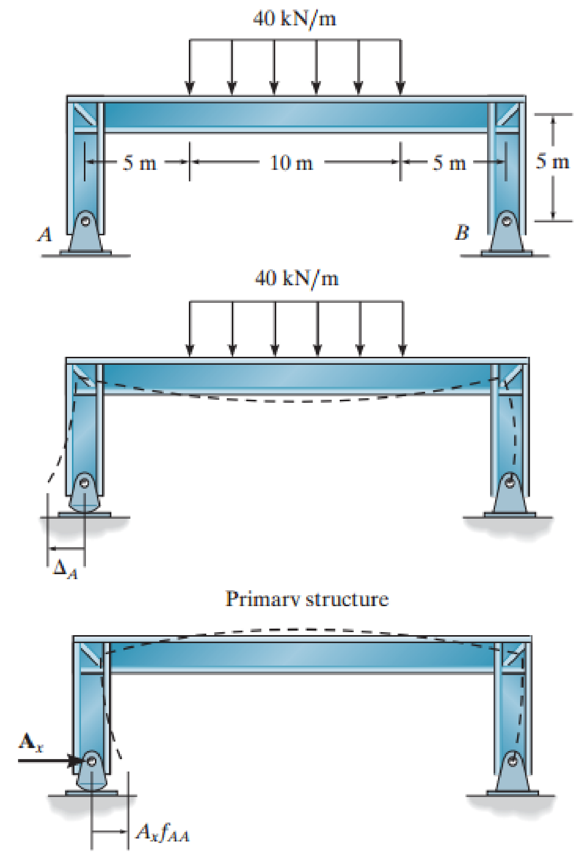
Force Method Untuk Portal

Example 10.5

Tentukan reaksi tumpuan dari struktur portal pada Fig.10.12.a serta gambarkan diagram gaya geser dan momen lentur. *EI* konstan.

- Portal tersebut merupakan struktur statis tak tentu berderajat satu
- Pilih reaksi horizontal di A (A_x) sebagai reaksi redundan
- Artinya tumpuan sendi di titik A diganti dengan tumpuan rol
- Persamaan kompatibilitasnya adalah :

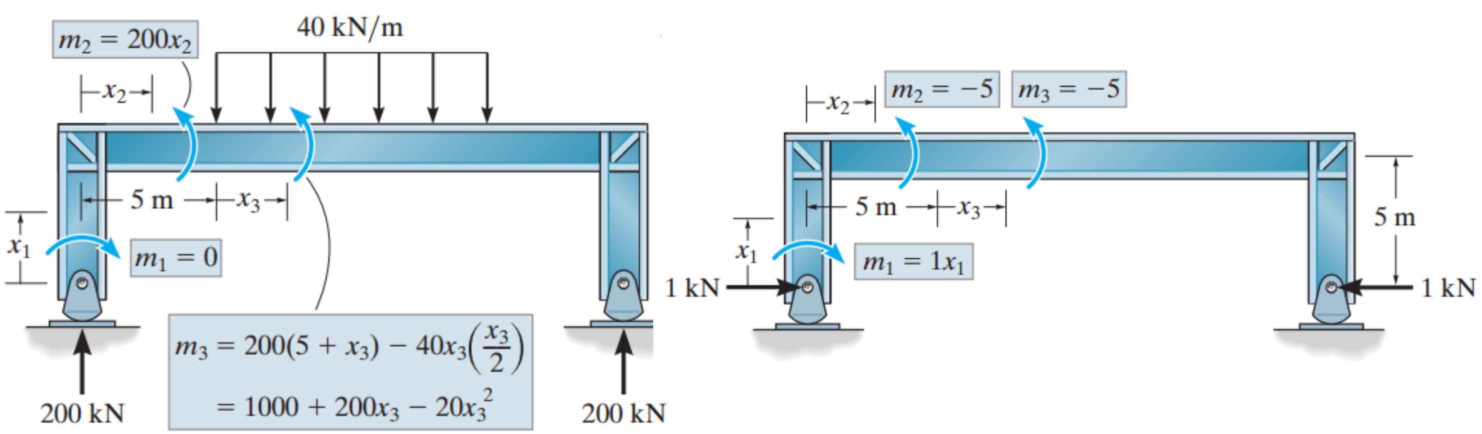
$$0 = \Delta_A + A_x f_{AA}$$



Force Method Untuk Portal

Example 10.5

- Untuk menentukan Δ_A dan f_{AA} akan digunakan metode kerja virtual dengan tiga buah koordinat x



Force Method Untuk Portal

Example 10.5

$$\Delta_A = \int_0^L \frac{Mm}{EI}dx = 2\int_0^5 \frac{(0)(1\cdot x_1)dx_1}{EI} + 2\int_0^5 \frac{(200x_2)(-5)dx_2}{EI} + 2\int_0^5 \frac{(1000+200x_3-20{x_3}^2)(-5)dx_3}{EI} = -\frac{91.666,7}{EI}$$

$$f_{AA} = \int_0^L \frac{mm}{EI}dx = 2\int_0^5 \frac{(1x_1)^2 dx_1}{EI} + 2\int_0^5 (5)^2 dx_2 + 2\int_0^5 (5)^2 dx_3 = \frac{583,33}{EI}$$

$$0 = \Delta_A + A_x f_{AA} \qquad \rightarrow \qquad A_x = 157 \text{ kN}$$

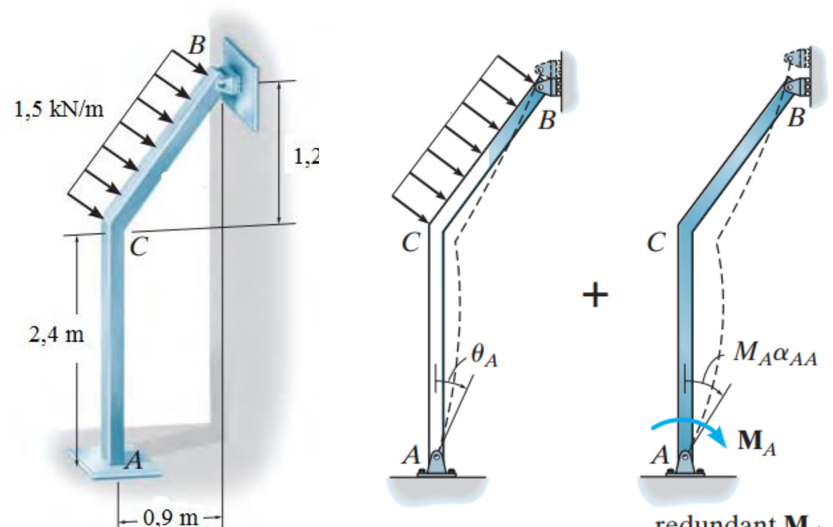
Force Method Untuk Portal

Example 10.6

Tentukan reaksi tumpuan dari struktur portal pada Fig.10.12.a serta gambarkan diagram gaya geser dan momen lentur. *EI* konstan.

- Portal tersebut merupakan struktur statis tak tentu berderajat satu
- Pilih M_A sebagai reaksi redundan
- Tumpuan jepit di titik A diganti sendi
- Persamaan kompatibilitasnya adalah :

$$0 = \theta_A + M_A \alpha_{AA}$$



(a)

primary structure
(b)

redundant M_A applied

Force Method Untuk Portal

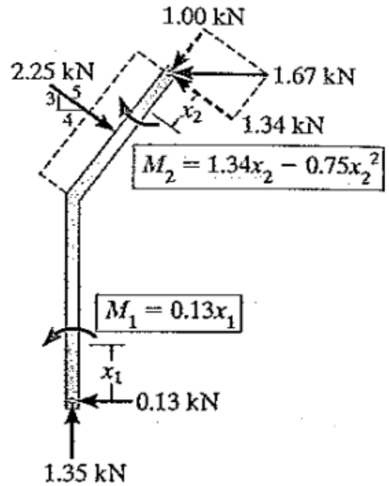
Example 10.6

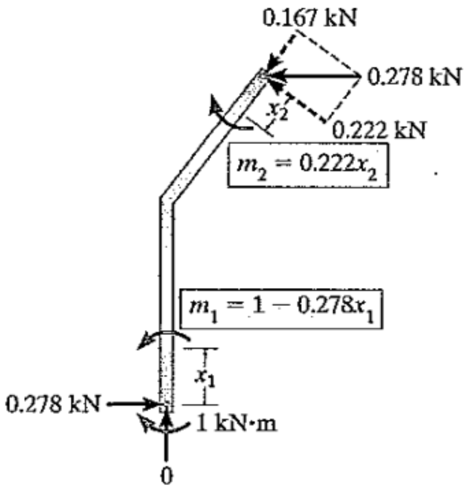
$$\theta_A = \sum \int_0^L \frac{Mm_\theta dx}{EI} = \int_0^{2,4} \frac{(0,13x_1)(1-0,278x_1)dx_1}{EI} + \int_0^{1,5} \frac{(1,34x_2 - 0,75x_2{}^2)(0,222x_2)dx_2}{EI} = \frac{0,333}{EI}$$

$$\alpha_{AA} = \sum \int_0^L \frac{m_\theta m_\theta dx}{EI} = \int_0^{2,4} \frac{(1-0,278x_1)^2 dx_1}{EI} + \int_0^{1,5} \frac{(0,222x_2)^2 dx_2}{EI} = \frac{1,21}{EI}$$

$$0 = \theta_A + M_A \alpha_{AA}$$

$\rightarrow$ $M_A = -0,275$ kNm





TUGAS :

Kerjakan soal dari textbook Bab X Nomor 10.13 s/d 10.24

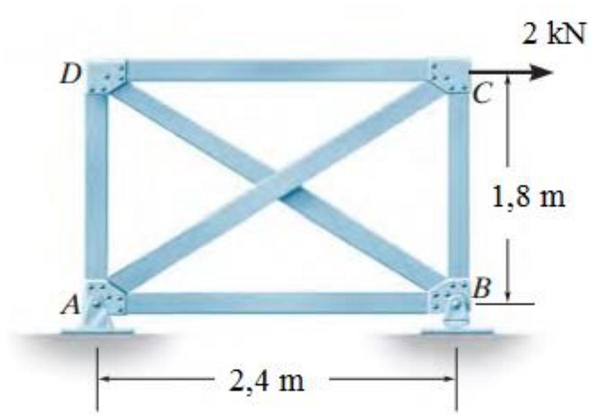
Force Method Untuk Rangka Batang

- Derajat ketidaktentuan suatu struktur rangka batang dapat diperiksa dengan menggunakan hubungan $b + r > 2j$
- Dengan b adalah jumlah batang, r adalah jumlah reaksi tumpuan, dan j adalah jumlah titik kumpul
- Force method mudah digunakan untuk menganalisis struktur rangka batang statis tak tentu derajat satu atau dua

Force Method Untuk Rangka Batang

Example 10.7

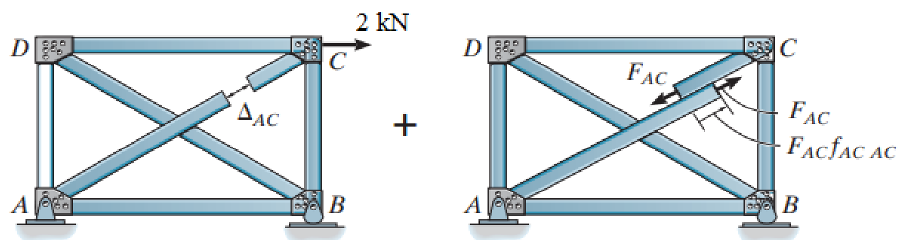
Tentukan besar gaya batang AC. EA konstan



- Portal tersebut merupakan struktur statis tak tentu berderajat satu
- Pilih gaya batang AC sebagai redundan
- Artinya batang AC “dipotong” sehingga dianggap tidak dapat memikul gaya
- Persamaan kompatibilitasnya adalah :

$$0 = \Delta_{AC} + F_{AC} f_{AC \cdot AC}$$

- Besar Δ_{AC} dan f_{ACAC} dihitung dengan metode kerja virtual



primary structure

redundant $\mathbf{F}_{AC}$ applied

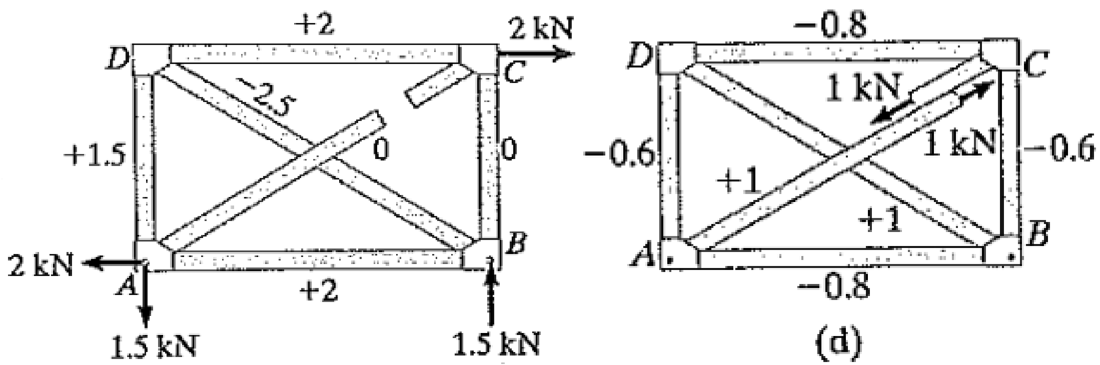
Force Method Untuk Rangka Batang

Example 10.7

$$\Delta_{AC} = \sum \frac{nNL}{AE} = 2\left[\frac{(-0{,}8)(2)(2{,}4)}{AE}\right] + \left[\frac{(-0{,}6)(0)(1{,}8)}{AE}\right] + \left[\frac{(-0{,}6)(1{,}5)(1{,}8)}{AE}\right] + \left[\frac{(1)(-2{,}5)(3)}{AE}\right] + \left[\frac{(1)(0)(3)}{AE}\right] = -\frac{16{,}8}{AE}$$

$$f_{ACAC} = \sum \frac{n^2L}{AE} = 2\left[\frac{(-0{,}8)^2(2{,}4)}{AE}\right] + 2\left[\frac{(-0{,}6)^2(1{,}8)}{AE}\right] + 2\left[\frac{(1)^2(3)}{AE}\right] = \frac{10{,}37}{AE}$$

$0 = \Delta_{AC} + F_{AC} f_{AC \cdot AC}$ $\rightarrow$ $F_{AC} = 1{,}62$ kN (T)



(c) (d)

Force Method Untuk Rangka Batang

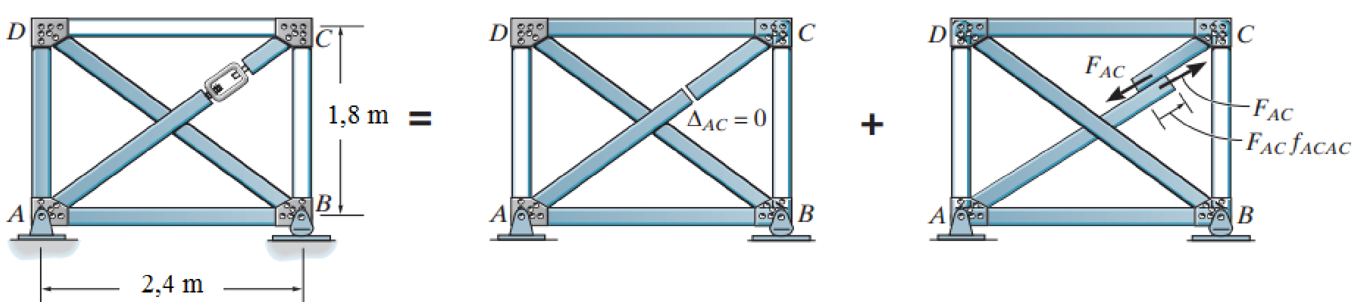
Example 10.8

Tentukan besar gaya batang AC, apabila batang AC memendek sebesar 12,5 mm. E = 200 GPa dan A = 125 mm^2

- Seperti contoh sebelumnya, pilih gaya batang AC sebagai redundan
- Persamaan kompatibilitasnya adalah :

$$0{,}0125 = \Delta_{AC} + F_{AC} f_{AC \cdot AC}$$

- Besar $\Delta_{AC} = 0$ dan $f_{ACAC} = 10{,}37/AE$



actual truss (a) | primary structure | redundant $\mathbf{F}_{AC}$ applied (b)

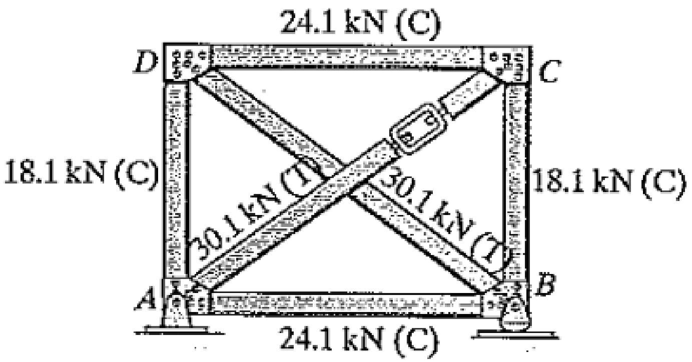
Force Method Untuk Rangka Batang

Example 10.8

$$0{,}0125 = 0 + \frac{10{,}37}{AE} F_{AC}$$

$$0{,}0125\mathrm{m} = \frac{10{,}37m}{125\mathrm{mm}^2 \times 200 \dfrac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2}} F_{AC}$$

$$F_{AC} = 30{,}13\mathrm{kN}$$



Dengan diketahuinya gaya batang AC, maka gaya batang lainnya dapat dihitung dengan metode keseimbangan gaya pada tiap titik kumpul

TUGAS :

Kerjakan soal dari textbook Bab X Nomor 10.25 s/d 10.33