

Mata Kuliah : Analisis Struktur  
Kode : CIV - 209  
SKS : 4 SKS

# ***Analisis Struktur Statis Tak Tentu dengan Metode Distribusi Momen***

Pertemuan – 14, 15

- **Kemampuan Akhir yang Diharapkan**
  - Mahasiswa dapat melakukan analisis struktur statis tak tentu dengan metode Momen Distribusi
- **Sub Pokok Bahasan :**
  - Definisi dan Prinsip Dasar Metode Distribusi Momen
  - Analisis Balok Dengan Metode Distribusi Momen
  - Analisis Portal Dengan Momen Distribusi

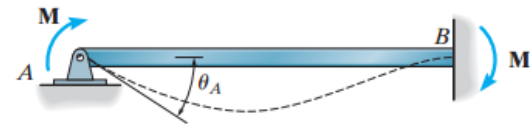
## Definisi dan Prinsip Dasar Metode Distribusi Momen

- Metode Distribusi Momen dikenalkan pertama kali oleh Hardy Cross pada tahun 1930
- Tiap titik kumpul dianggap merupakan hubungan kaku (jepit)
- **Faktor Kekakuan Batang**

Perhatikan balok dalam gambar yang memiliki ujung sendi dan jepit. Adanya momen  $M$ , mengakibatkan ujung A berotasi sebesar  $\theta$ . Hubungan antara  $M$  dan  $\theta_A$  dapat dituliskan sebagai :  $M = (4EI/L) \cdot \theta_A$ . Atau dapat pula dituliskan  $M = K \cdot \theta_A$ , dengan :

$$K = \frac{4EI}{L}$$

Untuk ujung sendi, maka :  $K = \frac{3EI}{L}$

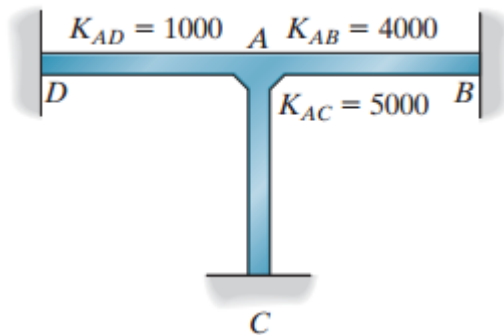


- Untuk balok dan beban yang simetris maka  $K = \frac{2EI}{L}$

## Definisi dan Prinsip Dasar Metode Distribusi Momen

- Faktor Kekakuan Titik Kumpul**

Apabila ada beberapa batang yang bertemu pada satu titik kumpul, dan batang – batang tersebut memiliki tumpuan jepit di ujung lainnya, maka dengan menggunakan prinsip superposisi, faktor kekakuan total pada titik tersebut adalah merupakan jumlahan dari masing – masing kekakuan tiap batang, atau dirumuskan  $K_T = \Sigma K$ .



$$K_{T,A} = \Sigma K = 4000 + 5000 + 1000 = 10.000$$

Nilai ini merepresentasikan besarnya momen yang diperlukan untuk mengakibatkan titik A berotasi sebesar 1 radian.

## Definisi dan Prinsip Dasar Metode Distribusi Momen

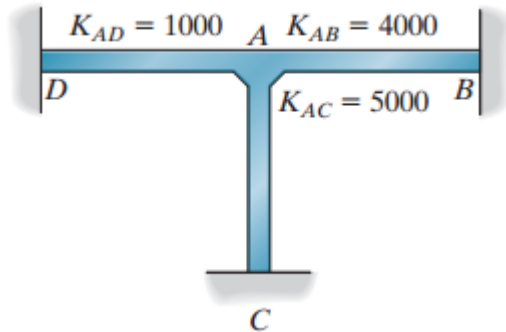
- **Faktor Distribusi (DF)**

1. Jika sebuah momen,  $M$ , bekerja pada suatu titik kumpul, maka semua batang – batang yang berkumpul pada titik tersebut akan memberikan sumbangan momen yang diperlukan untuk memenuhi kesetimbangan di titik tersebut.
2. Besarnya sumbangan momen dari tiap batang tersebut ditentukan oleh faktor distribusi (DF).
3. Nilai faktor distribusi sangat ditentukan oleh besarnya nilai kekakuan tiap batang

$$DF = \frac{K}{\Sigma K}$$

## Definisi dan Prinsip Dasar Metode Distribusi Momen

- Faktor Distribusi (DF)**



$$K_T = 10.000$$

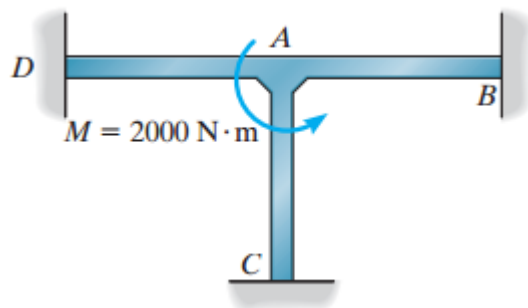
$$DF_{AB} = 4.000/10.000 = 0,4$$

$$DF_{AC} = 5.000/10.000 = 0,5$$

$$DF_{AD} = 1.000/10.000 = 0,1$$

$$DF_{AB} + DF_{AC} + DF_{AD} = 1,0$$

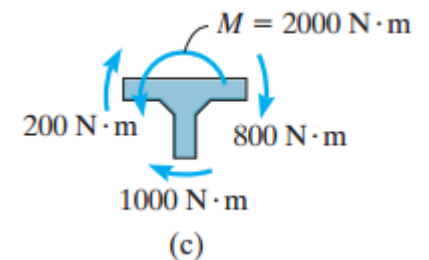
Bila ada di titik A ada momen sebesar 2.000 N.m, maka :



$$M_{AB} = 0,4(2.000) = 800\text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{AC} = 0,5(2.000) = 1.000\text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_{AD} = 0,1(2.000) = 200\text{N} \cdot \text{m}$$



## Definisi dan Prinsip Dasar Metode Distribusi Momen

- **Faktor Pemindahan/Carry Over (CO)**

1. Perhatikan kembali balok dalam gambar.
2. Seperti telah dijelaskan bahwa  $M_{AB} = (4EI/L)\theta_A$  dan  $M_{BA} = (2EI/L)\theta_A$
3. Dari keduanya dapat diperoleh hubungan :  $M_{BA} = \frac{1}{2} M_{AB}$
4. Atau dapat disimpulkan bahwa,  $M$  pada tumpuan sendi menimbulkan momen pada ujung jepit yang besarnya  $M' = \frac{1}{2} M$
5. Secara umum dapat dinyatakan bahwa untuk balok – balok dengan ujung jepit, mempunyai faktor pemindahan (CO) yang besarnya  $+ \frac{1}{2}$
6. Tanda positif menunjukkan bahwa kedua momen memiliki arah putar yang sama.



## Analisis Balok Dengan Metode Momen Distribusi

### Example 12.1

Tentukan momen internal pada tiap titik tumpuan, apabila EI konstan

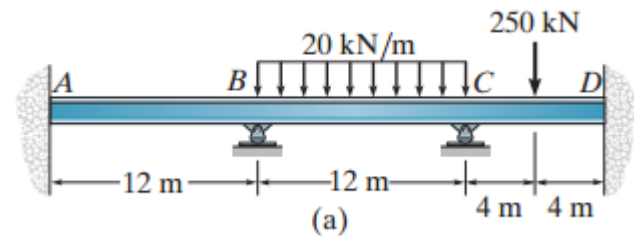
$$K_{AB} = \frac{4EI}{12} \quad K_{BC} = \frac{4EI}{12} \quad K_{CD} = \frac{4EI}{8}$$

$$DF_{AB} = DF_{DC} = 0 \quad DF_{BA} = DF_{BC} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/12} = 0,5$$

$$DF_{CB} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/8} = 0,4 \quad DF_{CD} = \frac{4EI/8}{4EI/12 + 4EI/8} = 0,6$$

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{20(12)^2}{12} = -240 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{20(12)^2}{12} = 240 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{CD} = -\frac{PL}{8} = -\frac{250(8)}{8} = -250 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (FEM)_{DC} = \frac{PL}{8} = \frac{250(8)}{8} = 250 \text{ kN} \cdot \text{m}$$





## Analisis Balok Dengan Metode Momen Distribusi

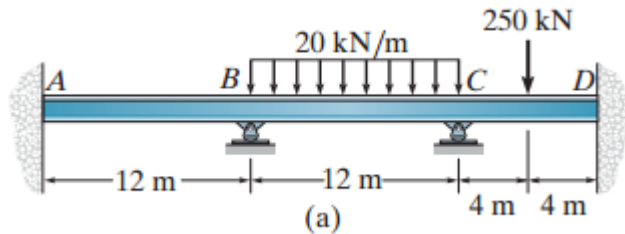
### Example 12.1

Joint	A	B		C		D	
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC	
DF	0	0.5	0.5	0.4	0.6	0	1
FEM Dist.		120	-240	240	-250	250	2
CO Dist.	60	2	4	6	3		3
CO Dist.		-1	-24	-36			4
CO Dist.	-0.5	6	0.2	0.3	-18		5
CO Dist.		0.1	3				6
CO Dist.	3	-0.05	-1.2	-1.8	0.2		7
CO Dist.		-0.6	-0.02				8
CO Dist.	-0.02	0.3	0.01	0.01	-0.9		9
$\Sigma M$	62.5	125.2	-125.2	281.5	-281.5	234.3	10

Dari nilai FEM ←

$\Sigma$  momen di  
satu titik,  
dikali DF di  
atasnya, dan  
dirubah tanda

Bagi  $\frac{1}{2}$  ke batang  
yang sama



$$M_{AB} = 62,63158 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA} = 125,2632 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC} = -125,263 \text{ kN.m}$$

$$M_{CB} = 281,5789 \text{ kN.m}$$

$$M_{CD} = -281,579 \text{ kN.m}$$

$$M_{DC} = 234,2105 \text{ kN.m}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{12}(2\theta_A + \theta_B - 3(0)) = \frac{EI}{6}\theta_B$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{12}(2\theta_B + \theta_A - 3(0)) = \frac{EI}{3}\theta_B$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{12}(2\theta_B + \theta_C - 3(0)) - 240 = \frac{EI}{3}\theta_B + \frac{EI}{6}\theta_C - 240$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{12}(2\theta_C + \theta_B - 3(0)) + 240 = \frac{EI}{6}\theta_B + \frac{EI}{3}\theta_C + 240$$

$$M_{CD} = \frac{2EI}{8}(2\theta_C + \theta_D - 3(0)) - 250 = \frac{EI}{2}\theta_C - 250$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{8}(2\theta_D + \theta_C - 3(0)) + 250 = \frac{EI}{4}\theta_C + 250$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{3}\theta_B + \frac{EI}{6}\theta_C = 240$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \Rightarrow \frac{EI}{6}\theta_B + \frac{5EI}{6}\theta_C = 10$$

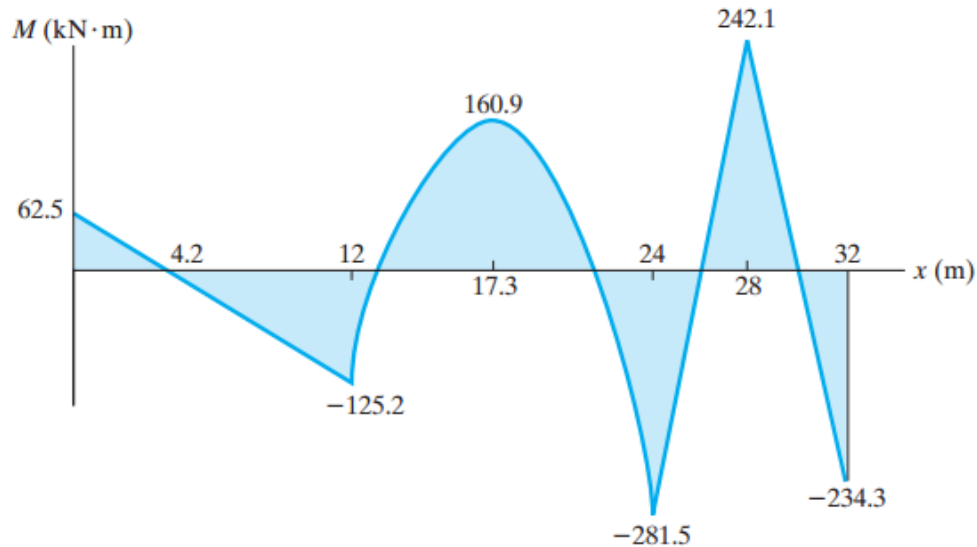
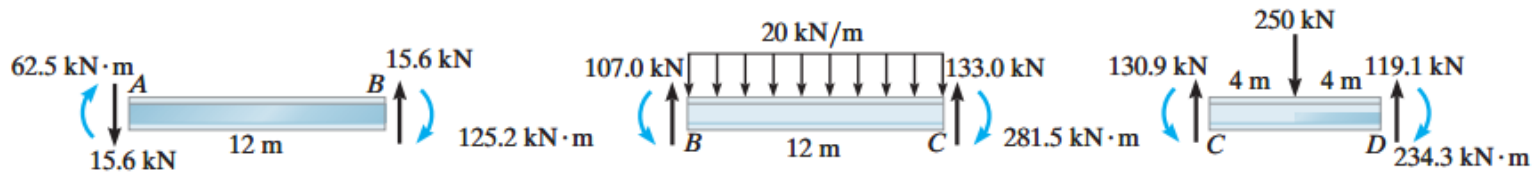


$$\theta_B = \frac{375,7895}{EI}$$

$$\theta_C = -\frac{63,1579}{EI}$$

## Analisis Balok Dengan Metode Momen Distribusi

### Example 12.1



## Analisis Balok Dengan Metode Momen Distribusi

### Example 12.2

Tentukan momen internal pada tiap titik tumpuan, apabila EI konstan

$$K_{BC} = \frac{4E(300)(10^6)}{4} = 300(10^6)E \quad K_{CD} = \frac{4E(240)(10^6)}{3} = 320(10^6)E$$

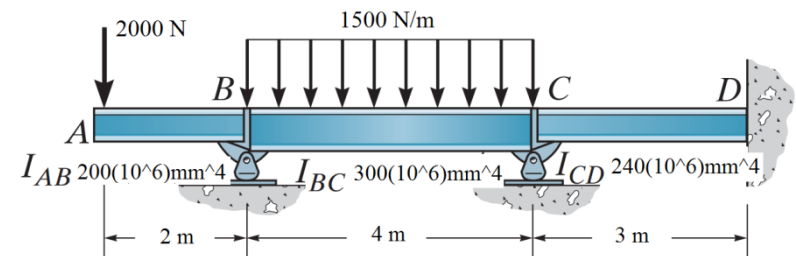
$$DF_{BC} = 1 - DF_{BA} = 1 - 0 = 1 \quad DF_{CB} = \frac{300E}{300E + 320E} = 0,484$$

$$DF_{CD} = \frac{320E}{300E + 320E} = 0,516 \quad DF_{DC} = \frac{320E}{\infty + 320E} = 0$$

$$(FEM)_{BA} = 2000N(2m) = 4.000N \cdot m$$

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{1500(4)^2}{12} = -2.000N \cdot m$$

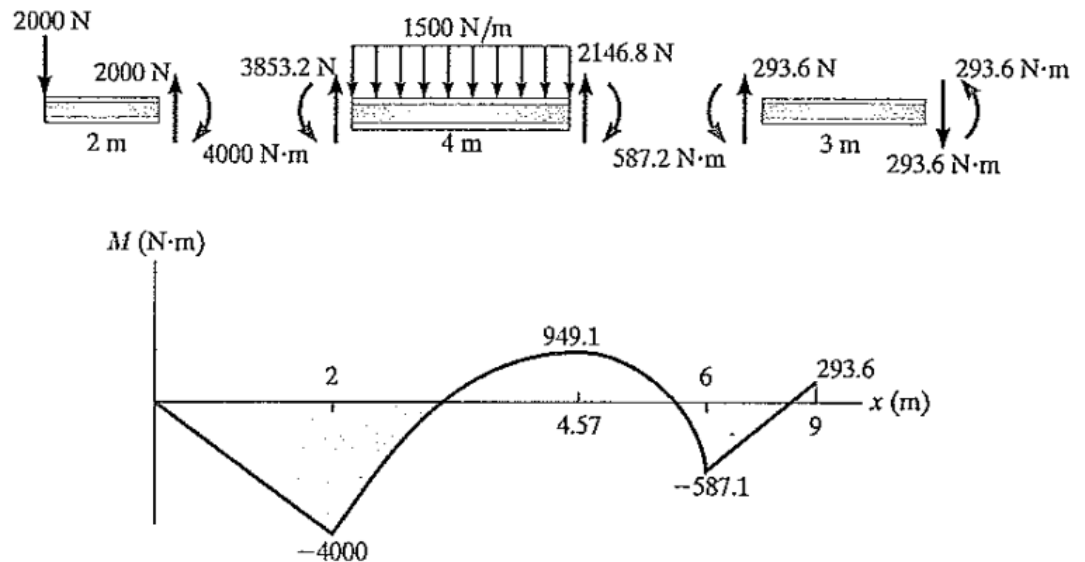
$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{1500(4)^2}{12} = 2.000N \cdot m$$



## Analisis Balok Dengan Metode Momen Distribusi

### Example 12.2

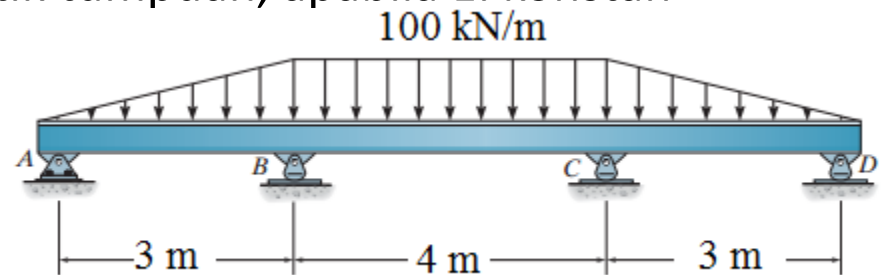
Joint		B		C		D
Member		BC	CB	CD	DC	
DF	0	1	0.484	0.516	0	
FEM	4000	-2000	2000			
Dist.		-2000	-968	-1032		
CO		-484	-1000		-516	
Dist.		484	484	516		
CO		242	242		258	
Dist.		-242	-117.1	-124.9		
CO		-58.6	-121		-62.4	
Dist.		58.6	58.6	62.4		
CO		29.3	29.3		31.2	
Dist.		-29.3	-14.2	-15.1		
CO		-7.1	-14.6		-7.6	
Dist.		7.1	7.1	7.6		
CO		3.5	3.5		3.8	
Dist.		-3.5	-1.7	-1.8		
CO		-0.8	-1.8		-0.9	
Dist.		0.8	0.9	0.9		
CO		0.4	0.4		0.4	
Dist.		-0.4	-0.2	-0.2		
CO		-0.1	-0.2		-0.1	
Dist.		0.1	0.1	0.1		
$\Sigma M$	4000	-4000	587.1	-587.1	-293.6	



## Analisis Balok Dengan Metode Momen Distribusi

### Example 12.3

Tentukan momen internal pada tiap titik tumpuan, apabila  $EI$  konstan



$$K_{AB} = \frac{3EI}{3} \quad K_{BC} = \frac{2EI}{4} = 320(10^6)E$$

$$DF_{AB} = \frac{3EI/3}{3EI/3} = 1$$

$$DF_{BA} = \frac{3EI/3}{3EI/3 + 2EI/4} = 0,667 \quad DF_{BC} = \frac{2EI/4}{3EI/3 + 2EI/4} = 0,333$$

$$(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{15} = \frac{100(3)^2}{15} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{100(4)^2}{12} = -133,3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Joint	A	B	
Member	AB	BA	BC
DF	1	0.667	0.333
FEM		60	-133.3
Dist.		48.9	24.4
$\Sigma M$	0	108.9	-108.9

## Analisis Balok Dengan Metode Momen Distribusi

### Example 12.4

Tentukan momen internal pada tiap titik tumpuan, apabila EI konstan

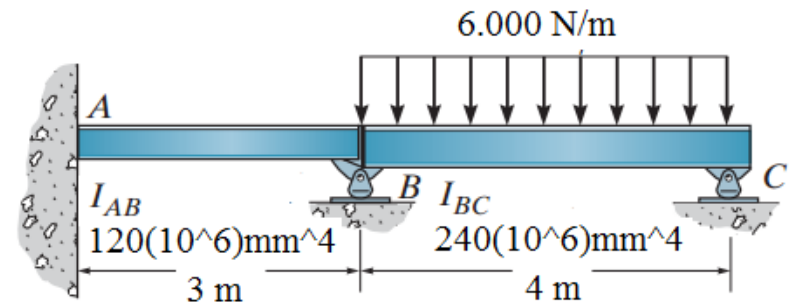
$$K_{AB} = \frac{4E(120)(10^6)}{3} = 160(10^6)E \quad K_{BC} = \frac{3E(240)(10^6)}{4} = 180(10^6)E$$

$$DF_{AB} = \frac{160E}{\infty + 160E} = 0$$

$$DF_{BA} = \frac{160E}{160E + 180E} = 0,4706 \quad DF_{BC} = \frac{180E}{160E + 180E} = 0,5294$$

$$DF_{CB} = 1$$

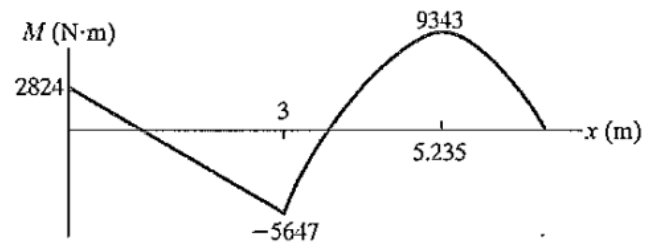
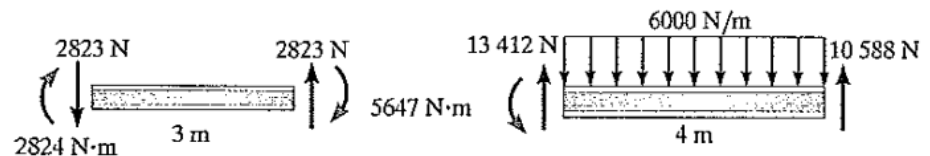
$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{8} = -\frac{6.000(4)^2}{8} = -12.000 \text{ N} \cdot \text{m}$$



## Analisis Balok Dengan Metode Momen Distribusi

### Example 12.4

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
DF	0	0.4706	0.5294	1
FEM Dist.		5647.2	-12 000 6352.8	
CO	2823.6			
$\Sigma M$	2823.6	5647.2	-5647.2	0





## **TUGAS :**

Kerjakan soal dari textbook Bab XII Nomor 12.1 s/d 12.9

## Analisis Portal Tak Bergoyang Dengan Metode Distribusi Momen

- Metode distribusi momen dapat digunakan pada analisis struktur portal tanpa goyangan, dengan prosedur yang sama seperti pada analisis struktur balok
- Untuk meminimalkan kesalahan yang terjadi, maka sangat disarankan agar perhitungan dilakukan dalam bentuk tabel

## Analisis Portal Tak Bergoyang Dengan Metode Distribusi Momen

### Example 12.5

Tentukan momen internal pada tiap titik tumpuan, apabila EI konstan. E dan D sendi, A tumpuan jepit

$$K_{AB} = \frac{4EI}{5} \quad K_{BC} = \frac{4EI}{6} \quad K_{CD} = \frac{3EI}{5} \quad K_{CE} = \frac{3EI}{4}$$

$$DF_{AB} = 0$$

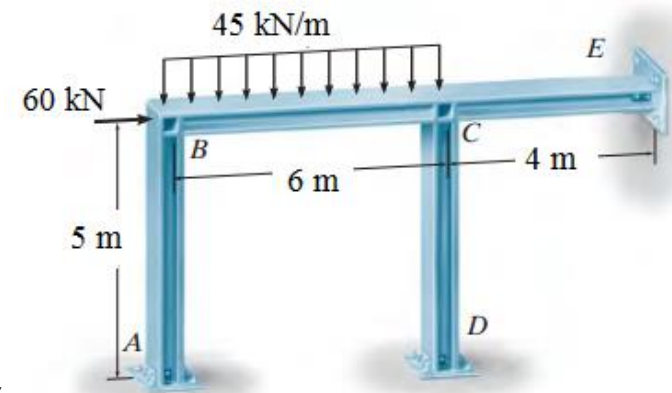
$$DF_{BA} = \frac{4EI/5}{4EI/5 + 4EI/6} = 0,545 \quad DF_{BC} = 1 - 0,545 = 0,45$$

$$DF_{CB} = \frac{4EI/6}{4EI/6 + 3EI/5 + 3EI/4} = 0,333$$

$$DF_{CD} = \frac{3EI/5}{4EI/6 + 3EI/5 + 3EI/4} = 0,298$$

$$DF_{CE} = 1 - 0,330 - 0,298 = 0,372$$

$$DF_{DC} = DF_{EC} = 1$$



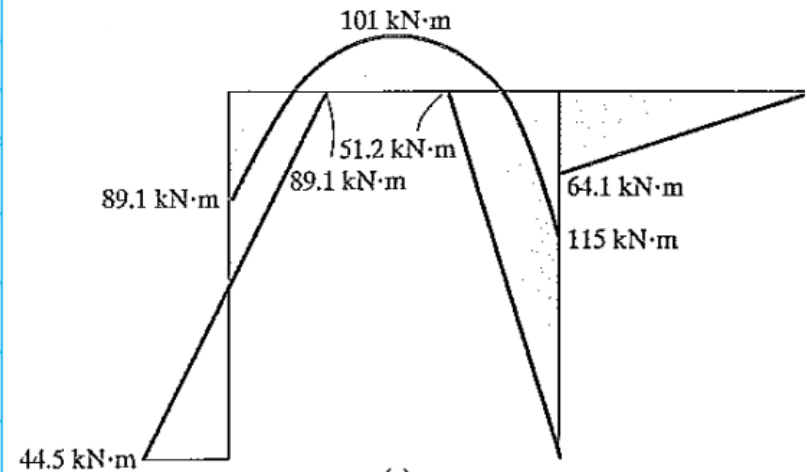
$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{45(6)^2}{12} = -135 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{45(6)^2}{12} = 135 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

## Analisis Portal Tak Bergoyang Dengan Metode Distribusi Momen

### Example 12.5

Joint	A		B		C		D	E
Member	AB	BA	BC	CB	CD	CE	DC	EC
DF	0	0.545	0.455	0.330	0.298	0.372	1	1
FEM								
Dist.		73.6	-135	135	-40.2	-50.2		
CO	36.8		61.4	-44.6				
Dist.		12.2	-22.3	30.7	-9.1	-11.5		
CO	6.1		10.1	-10.1				
Dist.		2.8	-5.1	5.1	-1.5	-1.9		
CO	1.4		2.3	-1.7				
Dist.		0.4	-0.8	1.2	-0.4	-0.4		
CO	0.2		0.4	-0.4				
Dist.		0.1	-0.2	0.2	0.0	-0.1		
CO			0.1	-0.1				
Dist.								
$\Sigma M$	44.5	89.1	-89.1	115	-51.2	-64.1		

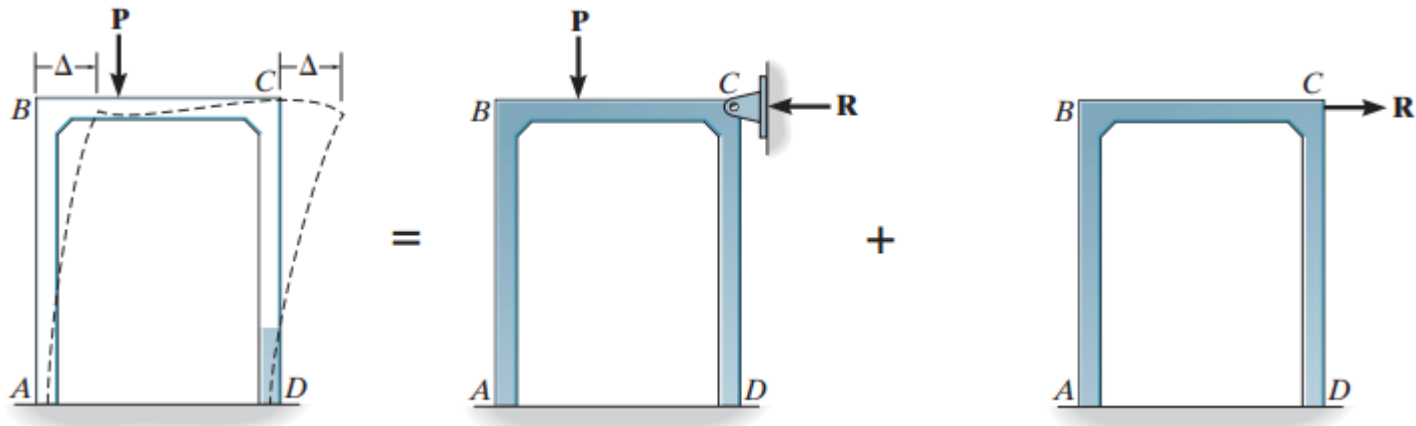


## **TUGAS :**

Kerjakan soal dari textbook Bab XII Nomor 12.10 s/d 12.15

## Analisis Portal Bergoyang Dengan Metode Distribusi Momen

- Dalam portal berikut, beban luar  $P$  akan menimbulkan momen internal di titik B dan C yang tidak sama besar, sehingga menimbulkan perpindahan horizontal sebesar  $D$  ke arah kanan.



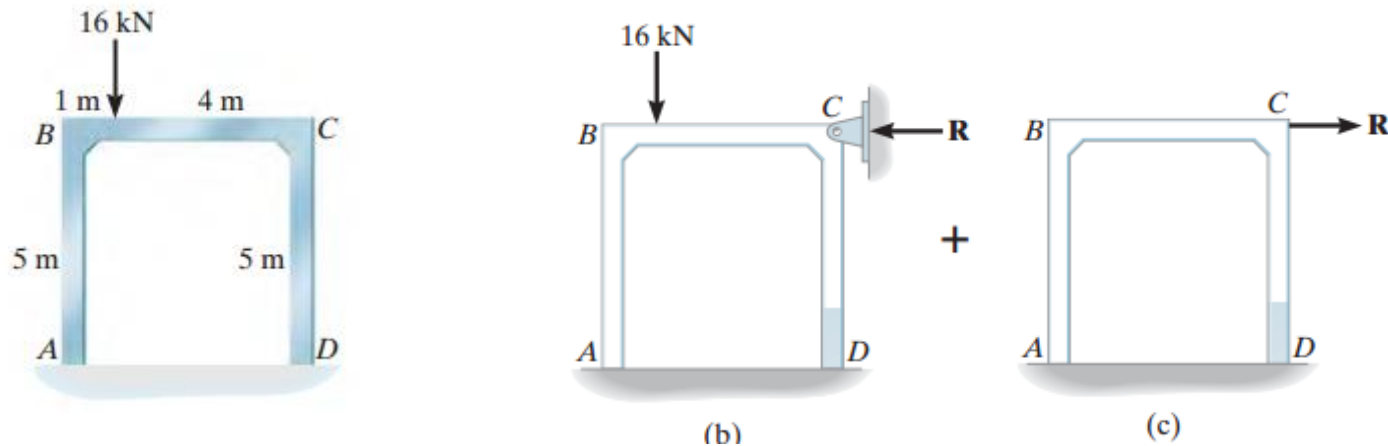
## Analisis Portal Bergoyang Dengan Metode Distribusi Momen

- Untuk menentukan besarnya perpindahan horizontal,  $\Delta$ , serta menghitung momen – momen internal yang terjadi pada portal tersebut dengan menggunakan metode momen distribusi, maka akan digunakan metode superposisi
- Awalnya portal ditahan terhadap goyangan dengan memberikan tumpuan di titik C,
- Kemudian lakukan analisis dengan menggunakan metode momen distribusi serta berdasarkan prinsip kesetimbangan statik, maka besar gaya  $R$  dapat ditentukan.
- Selanjutnya reaksi  $R$  yang sama besar namun berlawanan arah, diberikan pada portal tersebut
- Untuk melakukan analisis tersebut, maka mula – mula dapat diberikan momen internal  $M_{BA}'$  dengan besaran tertentu (semisal diambil sebesar 100 kN·m).
- Dengan menggunakan metode momen distribusi, maka besarnya  $\Delta'$  dan gaya eksternal  $R'$  akibat momen  $M_{BA}'$  dapat dihitung.
- Karena deformasi yang terjadi bersifat elastis linear, maka gaya  $R'$  menimbulkan momen pada portal yang besarnya proporsional terhadap momen yang ditimbulkan oleh  $R$ .
- Atau apabila  $M_{BA}'$  dan  $R'$  telah dapat dihitung, maka besarnya momen internal di titik B yang ditimbulkan oleh  $R$  adalah  $M_{BA} = M_{BA}'(R/R')$ .

## Analisis Portal Bergoyang Dengan Metode Distribusi Momen

### Example 12.6

Tentukan momen internal pada tiap titik kumpul, apabila  $EI$  konstan.



$$(FEM)_{BC} = -\frac{16(4)^2(1)}{5^2} = -10,24 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

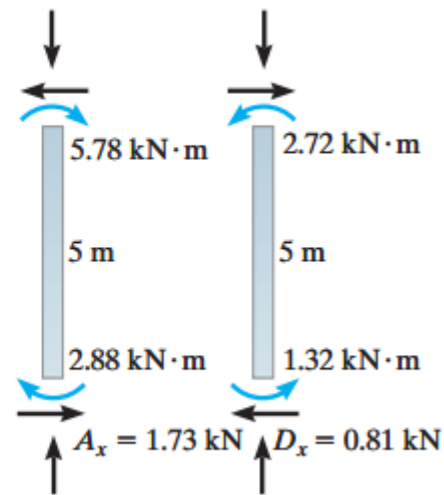
$$(FEM)_{CB} = \frac{16(1)^2(4)}{5^2} = 2,56 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



## Analisis Portal Bergoyang Dengan Metode Distribusi Momen

### Example 12.6

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0
FEM			-10.24	2.56		
Dist.		5.12	5.12	-1.28	-1.28	
CO	2.56		-0.64	2.56		-0.64
Dist.		0.32	0.32	-1.28	-1.28	
CO	0.16		-0.64	0.16		-0.64
Dist.		0.32	0.32	-0.08	-0.08	
CO	0.16		-0.04	0.16		-0.04
Dist.		0.02	0.02	-0.08	-0.08	
$\Sigma M$	2.88	5.78	-5.78	2.72	-2.72	-1.32



$$\Sigma F_x = 0; \quad R = 1,73\text{kN} - 0,81\text{kN} = 0,92\text{kN}$$



## Analisis Portal Bergoyang Dengan Metode Distribusi Momen

### Example 12.6

$$M_{AB} = 2,88 + \frac{0,92}{56,0}(-80) = 1,57 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA} = 5,78 + \frac{0,92}{56,0}(-60) = 4,79 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = -5,78 + \frac{0,92}{56,0}(60) = -4,79 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB} = 2,72 + \frac{0,92}{56,0}(60) = 3,71 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CD} = -2,72 + \frac{0,92}{56,0}(-60) = -3,71 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{DC} = -1,32 + \frac{0,92}{56,0}(-80) = -2,63 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

**TUGAS :**

Kerjakan soal dari textbook Bab XII Nomor 12.16 s/d 12.21