# TURUNAN FUNGSI (3)

## Turunan Fungsi Implisit

Fungsi implisit adalah fungsi yang berbentuk f (x,y)= 0 atau f(x,y)=c. Maka cara mencari dy/dx dari fungsi implicit adalah sebagai berikut:

Untuk memudahkan pemahaman , maka akan langsung diberikan beberapa contoh.

**Contoh:**

1. x2 + y2= 25 (fungsi Implisit)







1. jika x2 + y2 – 2x – 6y + 5 = 0

tentukan 

di titik 

Jawab :

* x2 + y2 – 2x – 6y + 5 =0

2x + 2y

(2y - 6)=2 – 2x

2 (y-3) =2(1-x)

=

di (3,2) 

* 



1. f(x,y)= x + xy2 – x sin y

(atau, x + xy2 = x sin y)

cari dan 

Jawab : (Coba sendiri yah, buat latihan .... )

## Penurunan dengan Bantuan Logaritma

Untuk menurunkan Fungsi yang berpangkat Fungsi, dapat digunakan penurunan dengan bantuan logaritma.

Jika diketahui z = f(u,v)= uv, dimana u,v adalah fungsi dalam x maka dapat dicari dengan 2 cara:

1. z = uv

ln z = ln uv

ln z = v ln u

diturunkan ke-x:



1. z = uv

z = 





**contoh:**

Diketahui z = xx

Cara pertama:

z = xx

ln z = ln xx

ln = x ln x



=xx (ln x +1)

Cara kedua:

z = xx

z = 





# TURUNAN FUNGSI (4)

## Mendeferensialkan Persamaan Bentuk Parameter

 t = parameter

 

Jika  y’= maka



= 

=  

**Contoh:**

1. x= 2 – t

y=t2 – 6t + 5

maka y’ = 



= 2x+2

= 2(x+1)

## Mendeferensialkan Fungsi dengan Peubah Lebih Dari Satu

Secara umum jika diketahui z adalah funsi dari u1, u2, u3, …, un, dan u1, u2, u3, …, un adalah fungsi dari x, maka



 = derifatif parsiil pertama dari z ke u

artinya peubah lain kecuali u dianggap konstan.

**Contoh:**

z = x2+y3+x2y3



1. 0<t<π



sin t dinyatakan dalam y

y= 1 – cos t

cos t = 1 – y (sin2t + cos2t = 1)

sin t = 

=

=

y’=

# TURUNAN FUNGSI: BEBERAPA APLIKASI (5)

## FUNGSI NAIK DAN TURUN

**Definisi :**

Suatu fungsi f(x) dikatakan naik di titik x = x0 , jika dapat ditunjukkan bilangan pos kecil *h* sedemikian, sehingga untuk setiap titik tertentu x1 < x2 yang terletak dalam interval (x0-h , x0+h) berlaku : f(x1) < f(x2) .

Suatu fungsi f(x) dikatakan turun di titik x = x0 , jika dapat ditunjukkan bilangan pos kecil *h* sedemikian, sehingga untuk setiap titik tertentu x1 > x2 yang terletak dalam interval (x0-h , x0+h) berlaku : f(x1) > f(x2) .

Untuk pemudahkan pemahamannyad diberikan skema pada gambar 3.1.

**Skema :**

*f*s naik

x0-h x1 x0 x2 x0+h

*f*s turun

x0-h x1 x0 x2 x0+h

**Gambar 3.1. Skema Fungsi Naik dan Fungsi Turun**

**Dalil :**

Jika  ⇒ y = *f* (x) naik di x = x0

 ⇒ y = *f* (x) turun di x = x0

 ⇒ titik stasioner dari fungsi *f* tercapai

 ⇒ maka titik (x0 , *f*(x0)) titik maksimum

 ⇒ maka titik (x0 , *f*(x0)) titik minimum

**Contoh :**



Tentukan semua ekstrim relatif dari fungsi *f*

**Jawab :**

*f* (x) = 2x4 – 4x2 + 3

*f’* (x) = 8x3 – 8x

= 8x (x2 – 1)

*f”* (x) = 24x2 – 8

Titik stasioner tercapai jika *f’’*(x) = 0

*f’* (x) = 8x (x2 – 1) = 0

= 8x (x+1) (x-1) = 0

x1 = 0 ; x2 = 1 ; x3 = -1

*f*(0) = 3 ; *f*(1) = 1 ; *f*(-1) = 1

+

-

+

-

-1 0 1

*f*” (0) = -8 < 0 maka (0, 3) titik maksimum

*f*” (1) = 16 > 0 maka (1, 1) titik minimum

*f*” (-1) = 16 > 0 maka (-1, 1) titik minimum

Sebelum mempelajari soal-soal lebih lanjut, akan diberikan terlebih dahulu teorema-teorema yang mendukung fungsi naik maupun fungsi turun.

**Teorema Uji Keturunan Kedua untuk Kecekungan**

Misal *f* fungsi yang mempunyai turunan kedua pada selang I (terbuka)

1. Jika  ⇒ Grafik *f* cekung ke atas pada I
2. Jika  ⇒ Grafik *f* cekung ke bawah pada I

**Definisi** Titik Belok (Ekstrim)

*f* fungsi kontinu pada selang terbuka I . Titik (, *f* ()) dikatakan titik belok jika dipenuhi 2 syarat berikut :

1. Terdapat perubahan kecekungan dari grafik fungsi *f* disekitar x = 
2. Terdapat garis singgung pada grafik *f*s *f* di (, *f* ())

**Contoh :**







1. Tentukan selang *f* cekung ke atas dan *f* cekung ke bawah
2. Tentukan semua titik ekstrimnya

**Jawab :**







= 

= 

  

 ;  ; 

Titik

Ekstrim

Titik

Ekstrim

Titik

Ekstrim

0

+ +

- -

+ +

- -

 

  

1. *f* cekung ke atas :



*f* cekung ke bawah :



1. Karena *f”*(x) ada di dan disekitar  ada perubahan kecekungan, maka titik ekstrimnya 

## Garis singgung dan Garis Normal

Untuk menentukan garis singgung suatu kurva, dapat menggunakan teorema-teorema berikut ini :

**a. Teorema Rolle**

Misalkan *f* memenuhi syarat :

* 1. Kontinu pada selang tertutup (a, b)
  2. Mempunyai turunan pada selang terbuka (a, b)
  3. *f* (a) = *f* (b)

Maka terdapat suatu  Э *f’* (c) = 0

(Teorema ini menjamin adanya titik-titik pada grafik *f*(x) dimana *f’* (x) = 0 atau garis singgung mendatar).

**Skema :**

*f’*(c) = 0

*f* (c)

*f*

*f* (a) = *f* (b)

a c b

**Gambar 3.2. Skema Teorema Rolle.**

1. **Teorema Nilai Rata-rata**

Misalkan *f* memenuhi syarat :

* 1. Kontinu pada selang tertutup (a, b)
  2. Mempunyai turunan pada selang terbuka (a, b)

Maka terdapat suatu  sehingga 

(Teorema ini menjamin adanya titik pada *f* yang garis singgung // dengan ruas garis yang menghubungkan titik (a, *f*(a)) dengan (b, *f*(b)).

**Skema :**

*f’*(c)

(b, *f* (b))

*f* (c)

*f* (b)

*f* (a)

a c b

b – a

**Gambar 3.3 Skema Teorema**

**Nilai Rata-rata.**

**c. Teorema, Rumus Tayor**

Misal fungsi *f* mempunyai turunan ke-(n+1) pada selang terbuka I yang memuat titik *x* dan *x0* , maka *f(x)* dapat diuraikan dalam bentuk :

*f*(x) = 

**

*c* terletak antara x dan x0 .

Dapat ditulis :



Dimana :

Pn(x) = suku banyak Taylor berderajad n

Rn(x) = 

= suku sisa uraian Taylor

**Contoh :**

Deretkan dengan R. Talyor *f(x) = sin x* di *x0 = 0*

**Jawab :**

*f(x) = sin x f (0) = 0*

*f’(x) = cos x f’(0) = 1*

*f”(x) = -sin x f”(0) = 0*

*f3(x) = -cos x f3(0) = -1*

*f4(x) = sin x f4(0) = 0*

*f5(x) = cos x f5(0) = 1*

*f(x) = *

= 

= 

Deret Taylor dimana *x0 = 0* dinamakan **Deret Mac Laurin**.

**Contoh :**

Diket : f(x)=x3-9x2+15x-5

Tentukan semua titik ekstrimnya.

Jawab:

f'(x) = 3x2-18x+15

Stasioner jika f'(x) = 0, maka 3x2-18x+15=0 atau x2-6x+5 = 0.

Sehingga (x-5)(x-1)=0, x1 = 5, x2 = 1.

f''(x) = 6x – 18 , maka f''(5) > 0, dan f''(1) < 0.

Jadi ekstrim minimum terjadi di titik (5, 12) dan ekstrim maksimum di titik (1,-12).

## Bentuk-bentuk Tidak Tertentu

Yang dinamakan bentuk-bentuk tak tertentu adalah bentuk-bentuk berikut:



**Aturan dari de *l’* Hospital** :

* 1. Diketahui *f(x)* dan *g(x)* kontinu dan dapat dideferensialkan sebanyak *n* kali disekitar *x = a*.





Sedang *f (n) (a)* dan *g (n) (a)* salah satu atau keduanya tidak nol, maka :



2. Kecuali untuk bentuk , aturan dari *de l’* hospital bisa juga dipakai untuk bentuk .



Sedang  *f (n) (a)* dan *g (n) (a)* salah satu atau keduanya tidak tak berhingga, maka :



**Contoh:**

1.  = 
2. 

= 

= 

= 

= 

1. 

= 

= 

**Contoh:**

1.  = = =

= = 0

1. = 
2. 

=  = 

**DAFTAR PUSTAKA**

[1] Yusuf Yahya, D. Suryadi H.S., Agus S., **Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi**, Ghalia Indonesia, Jakarta, 1995

[2] Frank Ayres, **Differential and Integral Calculus 2/ed**, McGraw-Hill Book Company, NewYork, 1978.

[3] Leithold, L ., 1972, *The Calculus with Analitic Geometry,* Harper International Edition, Harper and Row, Publishers, New York, Hagerstown, San Francisco, London.

[4] Martono, K., 1970, *Modern Control Engineering,* Prentice-Hall., Englewood Cliffs, New Jersey.

Kreyzig, E., 1983, *Advanced Engineering Mathematics,* John Wiley and Sons, Inc, Canada.