#  LIMIT FUNGSI

## Definisi Intuitif

Misalkan *y=f(x)* merupakan sebuah fungsi, *a* dan L bilangan riil

sedemikian hingga:

* Bila *x* mendekati *a* tetapi *x≠a*, maka *f(x)* mendekati L

Misalkan *f(x)* dapat kita buat sedekat mungkin ke L dengan membuat *x* cukup dekat *a* tetapi tidak sama dengan a

* Maka dapat dikatakan bahwa limit *f(x*) bila *x* mendekati *a* adalah L,



Contoh :

 , jika dihitung secara numerik maka hasilnya dapat dilihat pada tabel dan grafik berikut :



 

## Definisi Limit Secara Teoritis

Limit dari *f(x)* bila *x* menuju *a* adalah *L∈ R,* ditulis

jika dan hanya jika, untuk e > 0, terdapat d > 0 sedemikian sehingga jika

0 < |*x - a*| < d maka |*f(x) - L*| < e

## Sifat-sifat Limit Fungsi

Bila dan , dengan a sebarang bilangan riil, boleh - ∞ dan + ∞

Maka berlaku sifat-sifat berikut ini :

1. , k adalah sebarang bilangan

2.  (sifat penjumlahan)

3.  (sifat perkalian)

4. , n bilangan asli (1,2,3…..) (sifat perpangkatan)

5. , jika M≠0

6.  , bila M ≠ 0 (sifat pembagian)

7. , asalkan  bilangan riil (sifat akar)

8. (sifat logaritma natural)

9. , asalkan PL bil.riil, P sebarang bil. Riil (sifat eksponensial)



## Teorema Limit



1. Teorema Limit trigonometri :

2. Hukum Apit : Misalkan *f(x)* ≤ *g(x)* ≤ *h(x)* untuk semua *x* disekitar *a* namun *x≠ a,* dan

 maka

Contoh :

Bukti :





* Limit kiri (limit *f(x)* bila *x* menuju *a* dari kiri) :



* Limit kanan (limit *f(x)* bila *x* menuju *a* dari kanan) :



Teorema : jika dan hanya jika :

Contoh :



Contoh soal :





## LATIHAN

( a ) 

( b ) 

( c ) 

( d ) lim 1/x sin2x = lim 1/x . lim sin2x = 0 . lim sin2x = 0

 x→∞ x→∞ x→∞ x→∞

( e ) lim x2 – x – 2 = lim (x+1)(x-2) = 2 + 1 = 3

 x→2 x – 2 x→2 x – 2

( f ) lim x3 – 8 = lim (x-2).(x2+2x+4) = lim 22 + 2.2 + 4 = 12

 x→2 x - 2 x→2 (x-2) x→2

( g ) lim t2 – 5t + 6 = lim (t-2) (t-3) = (2-3) = -1/3

 t→2 t2 – t – 2 t→2 (t-2) (t+1) (2+1)

( h ) lim x2 – 1 = lim (x+1) (x-1) = lim x + 1 = 2

 x→1 | x – 1 | x→1 (x-1) x→1

 = lim (x+1) (x-1) = lim x + 1 = -2

 x→-1 -(x-1) x→-1 -1

( i ) lim √(25 – x2) = √(25 – 16) = √9 = 3

 x→4

( j ) lim x3 – 27 = lim (x-3) (x2+3x+9) = 27 = 9/2

 x→3 x2 – 9 x→3 (x-3) (x+3) 6

( k ) lim (x+h)2 – x2 = lim x2+2hx+h2 – x2 = lim 2hx + h2 = (2x+h) = 2

 h→0 h h→0 h h→0 h

( l ) lim 1 = lim 1 = 1/3

 x→0 3 + 21/x x→0 3 + 0

 = lim 1 = 0

 x→0 3+∞

( m ) lim ( x+ h )3 – x3 = lim ( x3+3x2h + 3xh2 + h3 ) – x3

 h→0 h h→0 h

 = lim 3x2h + 3xh2 + h3

h→0 h

 = lim ( 3x2 + 3xh + h2 ) = 3x2

 h→0

( o ) lim ( x2 – 1 ) ( x – 3 ) = lim ( x2 – 1 ) . lim ( x – 3 )

 x →2 x→2 x→2

 = ( 4 – 1 ) . ( 2 – 3 ) = -3

( p ) lim 3x3 + 5x2 – 7 = lim 3 + 5/x – 7/x3 = 3 (dikali 1/x3)

 x→~ 10x3 – 11x2 + 5x x→~ 10 – 11/x + 5/x2 10

( q ) lim ln ( 1 + x ) = lim (1/x ) (ln ( 1 + x ))

 x→0 x x→0

 = lim ln ( 1 + x ) 1/x = ln lim ( 1 + x ) 1/x = ln 1

 x→0 x→0

( r ) lim [( x2 + 1 )( 3x – 1 )] = lim ( x2 + 1 ) . lim ( 3x – 1 )

 x →2 x →2 x →2

 = [ lim (x2) + lim (1)] [ lim (3x) – lim (1)]

 x →2 x →2 x →2 x →2

 = [ lim (x2) + 1 ] [ 3 lim x – 1]

 x →2 x →2

 = [ 22+1 ] [ 3(2)–1 ] = 25

( s ) lim 3x4 – 8 = lim (3x4 – 8) lim (3x4) – lim 8

 x→-2 x3 + 24 x →-2 = x →-2 x →-2\_\_\_\_

 lim (x3+24) lim (x3) + lim 24

 x →-2 x →-2 x →-2

 = 3 lim (x4) – 8

 x →-2\_\_\_\_\_\_

 lim (x)3 + 24

 x →-2

 = 3(-2)4 – 8 = 5 = 2,5

 -8+24 2

( t ) lim (2t3 + 15)13 = lim (2t3) + lim (15)13

 t→-2 t→-2 t→-2

 = 2 lim (t3) + 15 13 = [ 2(-2)3 + 15 ]13 = (-1)13 = -1

( u ) lim ( 2w4 – 9w3 + 19 )-1/2 = lim (2w4) – lim (9w3) + lim (19) -1/2

 w→5 w→5 w→5 w→5

 = 2 lim (w)4 – 9 lim (w)3 + 19 -1/2

w→5 w→5

 = 2 (5)4 – 9(5)3 + 19  -1/2

 = (144)-1/2

 = √ 144 ≅ 1/12

( v ) lim 2f(x) – 3g(x) = 2 lim f(x) – 3 lim g(x)

 x→a f(x) + g(x) x→a x→a

 lim f(x) + lim g(x)

 x→a x→a

 = 2(3) – 3(-1) = 9 = 4,5

 (3) + (-1) 2

 dengan f(x) = 3 , g(x) = -1

( w ) lim f(x) – f(2) = lim ( 3x2 – 5 ) – (7)

 x→2 x – 2 x→2 x – 2

 = lim 3x2 – 12

 x→2 x – 2

 = lim 3( x+2 )( x-2 ) = 3(2+2) = 12

 x→2 x - 2

 dengan f(x) = (3x2 – 5)

**Kontinuitas Fungsi**

## Definisi

Fungsi f (x) di sebut kontinu di x = x0 jika :

1. f ( x0 ) terdefinisi
2. ada
3. = f(x0)

Fungsi f (x) disebut *kontinu* di x = x0 jika ketiga syarat di atas terpenuhi. Tetapi jika salah satu atau lebih persyaratan tidak terpenuhi maka di sebut *diskontinu.*

Secara grafik, fungsi *f* kontinu di  jika grafik fungsi *f* pada suatu interval yang memuat *x0* tidak terpotong di titik . Jika fungsi *f* tidak kontinu di x0 maka dikatakan *f* diskontinu di x0. Pada Gambar, *f* kontinu di *x*1 dan di setiap titik di dalam  kecuali di titik-titik *x*2, *x*3, dan *x*4. Fungsi *f* diskontinu di *x*2 karena  tidak ada, diskontinu di *x*3 karena nilai tidak sama dengan nilai fungsi di *x*3 (meskipun keduanya ada), dan diskontinu di *x*4 karena nilai fungsi di titik ini tidak ada.

 

°

°

°

 

•

 *a x*1 *x*2 *x*3 *x*4 *b*

Gambar 3.7.1

Fungsi *f* dikatakan kontinu pada interval *I* jika *f* kontinu di setiap titik anggota *I*.

**Contoh :**

(a). Fungsi *f* dengan rumus  diskontinu di *x =* 1 karena *f* (1) tidak terdefinisi.

(b). Fungsi *Heavyside* *H* yang didefinisikan oleh

 

diskontinu di *x* = 0 sebab  tidak ada.

(c). Fungsi *g* dengan definisi:

 

diskontinu di *x* = 2 sebab *g*(2) = 3 sedangkan . Namun demikian fungsi *g* kontinu di *x* = 1 sebab .█

## Sifat-sifat Dasar Fungsi Kontinu.

Seperti halnya pada hitung limit, dalam kekontinuan juga dikenal istilah kontinu satu sisi. Hal itu diberikan pada definisi berikut ini

**Definisi** (i).*Fungsi f dikatakan kontinu dari kiri di a jika* .

(ii). *Fungsi f dikatakan kontinu dari kanan di c jika* 

 **Teorema :** *Jika fungsi f dan g kontinu di a*, *dan k sebarang konstanta* *real*, *maka f*+*g*, *f – g, kf*, *dan fg kontinu di* *a*. *Demikian pula*,  *kontinu di a asalkan* .

**Contoh :** Diberikan  Selidikilah kekontinuan fungsi *f.*

**Penyelesaian:**

Jelas *f* tidak kontinu pada  dan pada  sebab *f* tidak terdefinisi pada interval tersebut. Untuk nilai-nilai *a* dengan –1 *< a* <1 diperoleh:



Jadi, *f* kontinu pada (−1, 1). Dengan perhitungan serupa didapatkan:

 dan 

sehingga *f* kontinu dari kanan di *x* = −1 dan kontinu dari kiri di *x* = 1. Jadi, *f* kontinu pada .█

**Contoh :**

(a).kontinu pada *R* .

(b). kontinu pada *R* ; .

(c). kontinu pada .█

## Contoh Soal dan Penyelesaiannya

1. Selidiki kekontinuan fungsi f(x) = 2x + 3 di titik x0 = 1

Jawab : ( i ) f(x0) = f(1) = 2(1) + 3 = 5

 (ii) 2x+3 = 2(1) + 3 = 5

 (iii) 2x+3 = f(1) = 5

 Karena ke tiga (3) syarat terpenuhi maka f(x) kontinu pada x = 1

 b. Selidiki kekontinuan fungsi 

Jawab : (i)  tidak terdefinisi

 Karena syarat pertama tidak terpenuhi, maka f(x) diskontinu di x = 2

1. Selidiki kekontinuan fungsi 

Jawab : (i) 

 (ii) 

 (iii) = f(2)

 Karena ketiga syarat terpenuhi maka f(x) kontinu pada x = 2

Hubungan antara fungsi kontinu dan hitung limit dinyatakan dalam teorema berikut.

## Contoh 3.7.9 Hitung .

**Penyelesaian:** Namakan  dan . Karena  dan f(x) kontinu di *x* = 2 maka .█

## Soal Latihan

Untuk soal 1 – 8, tentukan titik-titik di mana fungsi berikut diskontinu.

 1.  2.  3. 

 4.  5.  6. 

 7.  8. 

9. Selidiki kontinuitas  pada 

10.Jika maka tunjukkan bahwa *f* kontinu pada .

Untuk soal 11 – 13, tentukan nilai *a* dan *b* agar fungsi-fungsi berikut kontinu untuk pada *R*.

11.  12. 

Soal dari Nash

Carilah nilai f(x) untuk nilai-nilai limit berikut ini:

1 

2.  tipps: 

3.  tipps: 