#  F U N G S I

## **Definisi Fungsi**

Fungsi adalah pemetaan atau kejadian khusus dari suatu relasi. Jika himpunan A dan B memiliki relasi R sedemikian rupa sehingga setiap elemen himpunan A terhubung dengan satu elemen himpunan B maka dikatakan relasi R merupakan sebuah Fungsi.

Ditulis f : A🠒B

Contoh, jika A = {a,b,c,d} dan B = {1,2,3} maka relasi-relasi antara A dan B yang digambarkan berikut ini ada yang merupakan Fungsi dan ada juga yang bukan merupakan Fungsi.

 A B A B A B

 a • •1 a • •1 a • •1

 b • • 2 b • •2 b • •2

 c • • 3 c • •3 c • •3

 d • d • d •

 ↓ ↓ ↓

 Gambar 1. Gambar 2. Gambar 3.

 Relasi Fungsi Relasi Bukan Fungsi Relasi Bukan Fungsi

## Grafik Fungsi, Sistem Koordinat

Suatu fungsi riil dapat digambarkan grafiknya dengan menggambarkan pasangan-pasangan terurut dari fungsi tersebut pada sebuah sistem koordinat Cartesius yang terdiri dari 2 sumbu yang saling tegak lurus. Sumbu mendatar (sumbu X) menyatakan sumbu dari prapeta (sumbu variable bebas) dan sumbu tegak (sumbu Y) menyatakan sumbu peta (sumbu variable bergantung).

Untuk contoh relasi fungsi di atas, grafiknya adalah sebagaimana terlihat pada gambar berikut:

Dalam kaitanya dengan penerapan fungsi pada kasus-kasus yang melibatkan angka nyata nantinya –misalnya pada riset terapan, project maupun aktifitas operasional pada pekerjaan – mahasiswa perlu menyegarkan kembali pengertian bilangan kompleks, bilangan imajiner, bilangan riil, bilangan bulat, bilangan pecahan rasional, bilangan pecahan irasional.

Untuk membantu memahami pengertian fungsi, buatlah grafik kartesian untuk fungsi-fungsi berikut ini:

 atau 

## Daerah Definisi dan Daerah Nilai (Domain dan Range)

Jika fungsi f memetakan setiap elemen pada himpunan A ke elemen pada himpunan B, atau f : A🠒B, maka yang dimaksud Daerah Definisi (Domain) dari f adalah himpunan A, ditulis A = Df (harus habis, artinya setiap elemen pada himpunan A harus mempunyai pasangan pada himpunan B). Sedangkan himpunan B disebut Codomain dari f (tidak harus habis, artinya ada kemungkinan elemen pada himpunan B tidak mempunyai pada himpunan A). Himpunan bagian dari B merupakan himpunan semua peta (bayangan) dari f, disebut Daerah Nilai (Range), ditulis Rf ={y|y=f(x), x∈A}

Contoh :

1. Dari fungsi f : A🠒B pada gambar 1 di atas maka Df = A = {a,b,c,d} dan Rf = {1,2,3}
2. Jika f : R# 🠒 R# di mana x 🠒 x2 maka Df = R# , sedangkan Rf = {y|y≥0} = himpunan bilangan nonnegatif
3. Jika f(x) = y =  maka Df = {x|1-x2 ≥ 0}= {x|-1 ≤ x ≤ 1} dan Rf = {y|0 ≤ y ≤ 1}

## Jenis-jenis fungsi riil (R#) :

1. Fungsi Aljabar Linier, y = f(x) = ax + b

2 . Fungsi Polinom/suku banyak, f(x) = a0.xn + a1.xn-1 + …… + an-1x + an ….

3. Fungsi Logaritma : f(x) = alogx , a ≠ 0,1

4. Fungsi Trigonometri :

 

5. Fungsi Siklometri (Fungsi Invers Trigonometri)

 

6. Hiperbolik

 

## Fungsi Khusus

## Berikut ini adalah jenis-jenis fungsi khusus:

##

1. Fungsi Konstanta, f(x) = k, dengan x variabel riil dan k suatu bilangan riil tertentu. Grafik fungsi konstanta berbentuk garis lurus sejajar sumbu X. Contoh : f(x) = 2, f(x) = -5, dsb.
2. Fungsi Identitas, f(x) = x, untuk x variabel riil. Notasi f = I.
3. Fungsi Satu-satu, jika untuk nilai variabel x1≠x2 mengakibatkan f(x1)≠f(x2). Artinya : Untuk setiap elemen pada domain tepat memiliki satu dan hanya satu pasangan pada codomain (tidak ada prapeta yang mempunyai peta yang sama). Contoh : f(x) = 4x, f(x) = 5x-10, dsb. Apakah f(x) = x2 satu-satu? Kenapa?
4. Fungsi Pada (onto), jika daerah nilai fungsi (range) Rf sama dengan codomainnya. Contoh : f : R#🠒R# dengan f(x) = -5x adalah fungsi pada. Apakah f(x) = x2 merupakan fungsi pada? Kenapa?
5. Fungsi Komposisi (Tersusun), jika f : A🠒Rf dan g : Rf 🠒C maka gof : A🠒C disebut fungsi komposisi dari f dan g. Contoh : f : x🠒x+3 dan g : x🠒x2-1. Maka fungsi komposisi gof : xx+3 (x+3)2-1 atau gof(x)=g(f(x))=(x+3)2-1
6. Fungsi Invers, jika f : A🠒B fungsi yang satu-satu pada, maka fungsi g : B🠒A disebut fungsi invers dari f apabila komposisi gof = I (fungsi identitas). Notasi : g = f-1. Sebaliknya juga berlaku, f disebut fungsi invers dari g jika fog = I. Jadi : gof = fog = I. Contoh : y = f(x)=2x-4 suatu fungsi riil. Invers dari fungsi f dapat dicari dengan cara : y = 2x-4🠒2x = y+4🠒x = (1/2)y+2 atau f-1(y)=(1/2)y+2 atau simbol y diganti dengan x menjadi f-1(x)=(1/2)x+2
7. Fungsi Eksplisit, jika rumus fungsi y dinyatakan secara langsung oleh variabel bebas x, yaitu y = f(x), di mana variabel y dan x ditulis terpisah pada ruas kiri dan kanan, maka fungsi tersebut merupakan fungsi Eksplisit. Dalam hal lain, maka fungsinya disebut fungsi Implisit, yaitu jika variabel bebas dan variabel bergantungnya tidak terpisah. Suatu bentuk implisit kadang-kadang sukar bahkan tidak bisa diubah ke bentuk eksplisit. Kadang-kadang bentuk implisit bukan suatu fungsi, karena mempunyai nilai lebih dari satu, untuk itu disebut fungsi berharga banyak.

Contoh : y = x2+3x-2 adalah fungsi eksplisit. Tetapi persamaan yx2 + 3x = 4 merupakan fungsi implisit dan persamaan 3x-2y2+4 = 0 bukan fungsi. Kenapa?

1. Fungsi genap, jika berlaku f(-x) = f(x) untuk setiap x ∈ Df. Sedangkan fungsi ganjil, jika berlaku f(-x) = - f(x) untuk setiap x ∈ Df. Contoh : y = cos x adalah fungsi genap sedangkan y = sin x adalah fungsi ganjil. Kenapa? Bagaimana dengan fungsi y = e-x ?
2. Fungsi periodik, f(x) disebut fungsi periodik dengan periode T, jika untuk setiap x∈Df berlaku f(x+T) = f(x), T>0 merupakan konstanta terkecil yang memenuhi. Contoh : f(x) = sin x adalah fungsi periodik dengan periode 2π. Kenapa? Bagaimana dengan f(x) = tg x ?
3. Fungsi terbatas, f(x) disebut terbatas di atas pada suatu interval jika terdapat konstanta M sehingga f(x) ≤ M, untuk setiap x pada interval tersebut. Disebut terbatas di bawah jika terdapat konstanta m sehingga f(x) ≥ m, untuk setiap x pada interval tersebut. f(x) disebut terbatas apabila f(x) terbatas di atas dan terbatas di bawah. M disebut batas atas dan m disebut batas bawah. Contoh : f(x)= 3+x tidak terbatas pada interval -∞ < x < +∞, tetapi terbatas pada interval -1≤ x ≤ 1. Kenapa?
4. Fungsi monoton, f(x) disebut monoton naik pada suatu interval jika untuk setiap x1, x2 pada interval tersebut nilai x1 < x2 mengakibatkan f(x1) ≤ f(x2). Sebaliknya, jika f(x1) ≥ f(x2) maka fungsi disebut monoton turun. Contoh :  adalah monoton turun pada interval 0 ≤ x ≤ 9. Kenapa?
5. Fungsi Dalam Bentuk Parameter

Sebuah fungsi y = f(x) jika dinyatakan sebagai : x = f1(t) dan y = f2(t), maka disebut fungsi **d**alam parameter t. Apabila variabel t dihilangkan maka akan menghasilkan bentuk fungsi semula yaitu y = f(x). Contoh : Jika x = 2t dan y = 4t2-3t maka akan diperoleh sebuah fungsi baru, yaitu y = x2-(3/2)x. Bagaimana caranya?

## Koordinat Polar

Selain sistem koordinat Cartesius, fungsi dapatdigambarkan juga pada sistem koordinat Polar, di mana setiap titik pada bidang datar dinyatakan sebagai pasangan terurut (r,∅). r menunjukkan panjang vektor posisi titik P (panjang OP) dan ∅ menunjukkan sudut polar, yaitu sudut antara sumbu polar dengan OP (dengan arah berlawanan jarum jam).

Hubungan antara koordinat Cartesius dan Polar :

Jika x = r cos ∅ dan y = r sin ∅ maka r2 = x2 + y2 dan tg ∅ = y/x . Bagaimana caranya?

Contoh : Jika r = a√2 cos 1/2∅ diubah ke bentuk koordinat Cartesius maka menjadi :

 x6 + y6 + 3x4y2 + 3x2y4 – 4a2x2y2 – 2a2x4 – 2a2y4 + a4y2 = 0. Coba buktikan!

## Latihan

(1) Jika T adalah relasi dari A = { 1,2,3,4,5 }, B = { merah,putih,biru,hijau } di mana

T = {(1,merah),(1,biru),(3,biru),(4,hijau)} maka :

(i) gambarkan diagram pohon/panah relasi T

(ii) tentukan domain & range dari T

(iii) tentukan T-1

(2) Diketahui A B maka carilah :

 a\* f \*x

 b\* \*y

 c\* \*z

 d\* \*w

 (i) nilai range dari setiap elemen di A

 (ii) range dari f (A)

 (iii) tuliskan f sebagai himpunan dari pasangan terurut

(3) Diketahui : f memetakan setiap Negara di dunia ke ibukotanya

 Tentukan f(Prancis), f(Canada), f(Jepang)

(4) Diketahui fungsi f(x) = x2 – 3x + 2

 Ditanyakan : (i) f(x2)

 (ii) f(y-z)

 (iii) f(x+3)

 (iv) f(2x-3)

(5) Diketahui fungsi f : R→ R yaitu f(x) = x3

 Ditanyakan ; (i) f(3) dan f(-5)

 (ii) f(y) dan f(y+1)

 (iii) f(x+h)

 (iv) f[ f(x+h) – f(x) ] / h

(6) Gambarkan grafik fungsi f(x) = 3x-2 dengan nilai x = -2,0,2

(7) Gambarkan grafik fungsi g(x) = x2 + x – 6

(8) Misal A = { 1,2,3,4 }, B = { a,b,c,d }, C = { x,y,z } dengan relasi R dan S sbb :

 R = {(1,a),(2,d),(3,a),(3,b),(3,d)} dan S = {(b,x),(b,z),(c,y),(d,z)}

 Cari relasi komposisi RoS dan gambarkan diagram panahnya!

(9) Diketahui A = { a,b,c,d }, B = { 1,2,3 }, C = { w,x,y,z } dengan relasi sbb :

 R = {(a,3),(b,3),(c,1),(c,3),(d,2)} dan S = {(1,x),(2,y),(2,z)}

 Tentukan relasi komposisi R0S & diagram panahnya

(10) Diketahui f(x) = 2x + 1 dan g(x) = x2 - 2 , tentukan :

 a. gof(x) b. fog(x)

 c. gof(4) d. fog(4)

 e. gof(a+2) f. fog(a+2)

(11) Tentukan domain dari fungsi :

 a. y = (x-2)/(x2-4)

 b. y = 

(12) Gambarkan grafik dari fungsi

 a. y = |x+4| + |2x+6|

 b. y = |x2 – x|

(13) Tentukan nilai dari :

 a. tg (2 arc sin 3/5)

 b. arc sin (cos 2x)

(14) Ubahlah bentuk persamaan parameter berikut dalam bentuk persamaan biasa :

 a. x = a cos t dan y = b sin t

 b. x = 6t – 12t2 dan y = 2t

(15) Ubahlah bentuk persamaan berikut dalam bentuk polar :

 a. x2 + y2 = a2

 b. (x2 + y2)2 = ax2y

(16) Ubahlah bentuk persamaan berikut dalam bentuk Cartesius :

 a. r = a sin ∅ tg ∅

 b. 4(1 – cos ∅)-1

(17) Tentukan fog dan gof jika relasi :

 a. f = {(a,b),(b,a)} dan g = {(a,b),(b,a)}

 b. f = {(1,2),(2,4),(3,1)} dan g = {(3,2),(5,1),(6,4)}

(18) Tentukan invers dari fungsi :

 a. y = 5x – 10 b. y = (6x + 8)/(-7x -10)

(19) Tentukan daerah nilai/range dari fungsi :

 a. y = x2 + 8x -10 dengan Df = {x|0 < x < 1}

 b. y = sin 2x dengan Df = {x|-π < x < π}

(20) Gambarkan grafik fungsi pada soal no.19