DIKTAT KULIAH

ANALISIS NUMERIK

(CIV – 208)

Oleh :

Agus Setiawan, S.T., M.T.

PROGRAM STUDI TEKNIK SIPIL
FAKULTAS TEKNOLOGI & DESAIN
UNIVERSITAS PEMBANGUNAN JAYA
TANGERANG SELATAN, 2016

DAFTAR ISI

BAB I

PENGANTAR METODA NUMERIK

1.1 Pendahuluan

Metoda Numerik adalah suatu teknik penyelesaian yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan/aritmatik dan dilakukan secara berulang – ulang dengan bantuan komputer atau secara manual (*hand calculation*).

Dalam analisa suatu permasalahan yang didekati dengan menggunakan metoda numerik, pada umumnya melibatkan angka – angka dalam jumlah banyak dan proses perhitungan matematika yang cukup rumit. Perhitungan secara manual akan memakan waktu yang panjang dan lama (*consuming time*), namun dengan munculnya berbagai software komputer, masalah ini dapat diselesaikan dengan mudah. Beberapa bahasa pemrograman yang dapat dipakai dalam metoda numerik seperti C++, Fortran, Turbo Pascal, Basic dan lain – lain.

1.2 Model Matematika Sederhana

Sebuah model matematika dapat didefinisikan secara kasar sebagai sebuah formulasi atau persamaan yang mengekspresikan suatu sistem atau proses dalam istilah matematika. Sebagai bentuk yang umum, model matematika dapat direpresentasikan dalam hubungan fungsional, dalam bentuk :

Variabel terikat = f (variabel bebas, parameter, fungsi gaya) 1.1

Variabel terikat pada umumnya mencerminkan perilaku dari sistem, sedangkan variabel bebas sering berupa waktu atau ruang. Parameter merupakan properti dari sistem, (misalnya koefisien gesekan sistem), dan fungsi gaya adalah pengaruh luar yang bekerja pada sistem.

Ekspresi matematika dalam persamaan 1.1 dapat berupa suatu persamaan aljabar sederhana, namun dapat pula berupa satu set persamaan diferensial yang kompleks. Hukum gerak Newton II yang menyatakan bahwa laju perubahan momentum pada suatu sistem adalah sama dengan resultan gaya yang bekerja padanya. Ekspresi matematika, atau model, dari Hukum Newton II adalah suatu persamaan yang cukup terkenal, yaitu:

$$F = m.a \tag{1.2}$$

Dengan F adalah gaya luar yang bekerja pada sistem (dalam Newton, atau kilogram-meter per detik), m adalah massa dari objek (dalam kilogram), dan a adalah percepatan (dalam m/s^2).

Hukum Newton II dapat dibentuk seperti persamaan 1.1 dengan membagi kedua sisi persamaan 1.2, dengan m, sehingga diperoleh bentuk:

$$a = \frac{F}{m} \tag{1.3}$$

Dengan a adalah variabel terikat yang mencerminkan perilaku sistem, F adalah fungsi gaya, dan m adalah parameter yang merepresentasikan properti dari sistem. Sebagai catatan, dalam kasus sederhana ini tidak dijumpai variabel bebas sebab kita tidak memprediksikan perubahan percepatan dalam waktu atau uang.

Karena bentuk aljabar yang sederhana, maka solusi dari persamaan 1.2 dapat diperoleh dengan mudah. Namun, model matematika yang lain dari fenomena fisik dapat lebih kompleks, dan pada umumnya tak bisa diselesaikan secara eksak atau memerlukan teknik matematika yang canggih untuk mendapatkan solusinya. Untuk mengilustrasikan model yang lebih kompleks ini, Hukum Newton II dapat juga digunakan untuk menentukan kecepatan akhir sebuah benda jatuh bebas di dekat permukaan bumi. Pemodelan matematika dari seorang penerjun payung dalam gambar 1.1 dapat diturunkan dengan mengekspresikan percepatan sebagai laju perubahan kecepatan (*dv/dt*). Substitusikan *dv/dt* kedalam persamaan 1.2 akan diperoleh

$$m\frac{dv}{dt} = F \tag{1.4}$$

Dengan v adalah kecepatan (dalam m/s). Sehingga massa dikalikan laju perubahan kecepatan adalah sama dengan resultan gaya yang bekerja pada sistem. Jika resultan gaya adalah positif maka sistem bergerak dipercepat. Jika resultan gaya negatif sistem akan bergerak diperlambat. Sedangkan bila resultan gaya sama dengan nol, kecepatan sistem akan tetap.

Selanjutnya kita akan mengekspresikan resultan gaya dalam bentuk variabel dan parameter terukur. Untuk seorang penerjun payung yang jatuh di sekitar bumi (gb. 1.1), resultan gaya terdiri dari dua gaya yang berlawanan: gaya tarik kebawah dari gravitasi F_D dan gaya angkat dari tahanan udara F_U.

$$F = F_D + F_U \qquad 1.5$$

Gambar 1.1 Gaya Yang Bekerja Pada Payung

Jika gaya kebawah diberi tanda positif, Hukum Newton II dapat digunakan untuk memformulasikan gaya akibat gravitasi sebagai

$$F_D = m.g \qquad 1.6$$

Dengan g adalah konstanta gravitasi yang besarnya adalah 9,8m/s^2.

Tahanan udara dapat diformulasikan melalui berbagai macam cara. Pendekatan yang paling sederhana adalah dengan mengasumsikannya proporsional linear terhadap kecepatan dan bekerja dalam arah ke atas.

$$F_U = -c.v \qquad 1.7$$

Dengan c adalah koefisien gesekan udara dalam kg/s.

Gaya resultan adalah selisih antara gaya ke atas dan gaya ke bawah. Oleh karena itu persamaan 1.4 sampai 1.7 dapat dikombinasikan sehingga diperoleh

$$m\frac{dv}{dt} = m.g - c.v \qquad 1.8$$

Membagi kedua sisi persamaan 1.8 dengan *m* , diperoleh:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v \qquad 1.9$$

Persamaan 1.9 adalah sebuah model yang menghubungkan percepatan benda jatuh bebas dengan gaya yang bekerja padanya. Persamaan ini adalah sebuah persamaan diferensial sebab dirumuskan dalam bentuk laju perubahan (*dv/dt*) dari variabel yang ingin kita tentukan . Namun solusi eksak dari persamaan 1.9 tak dapat diperoleh melaluiperhitungan aljabar sederhana. Teknik lanjutan dari kalkulus harus diterapkan untuk mencari solusi eksak atau analitis dari 1.9, dengan *initial condition* ($v = 0$, saat $t = 0$), maka solusi eksaknya adalah :

$$v(t) = \frac{g.m}{c}\left[1 - e^{-(c/m).t}\right] \qquad 1.10$$

Perhatikan bahwa $v(t)$ adalah variabel terikat, t adalah variabel bebas, c dan m adalah parameter, dan g adalah fungsi gaya.

Persamaan 1.10 disebut sebagai solusi eksak atau solusi analitis dari persamaan 1.9. Namun banyak model matematika yang tak dapat diselesaikan secara eksak, sehingga alternatif penyelesaiannya adalah melalui solusi numerik yang merupakan hampiran bagi solusi eksak. Sebagai ilustrasi, laju perubahan kecepatan dalam Hukum Newton II dapat didekati sebagai berikut :

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \qquad 1.11$$

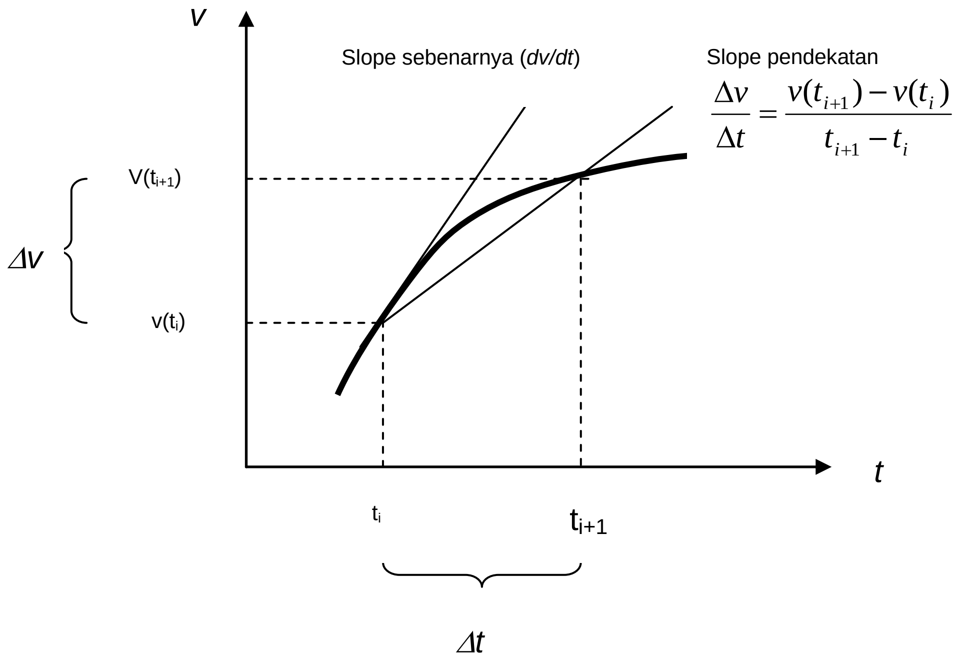
Dengan Δv dan Δt adalah perubahan kecepatan dan waktu yang dihitung dalam suatu selang. Sedangkan $v(t_i)$ adalah kecepatan pada waktu t_i, dan $v(t_{i+1})$ adalah kecepatan pada waktu t_{i+1}. Persamaan 1.11 sering disebut sebagai pendekatan diferensi hingga (*finite difference*).

Bila 1.11 disubstitusikan ke dalam persamaan 1.9 maka akan diperoleh :

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c}{m}.v(t_i) \qquad 1.12.a$$

Persamaan 1.12.a dapat diatur sehingga diperoleh bentuk :

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c}{m}.v(t_i) \right] (t_{i+1} - t_i) \qquad 1.12.b$$



Gb. 1.2 Penggunaan Finite Difference Untuk Pendekatan Terhadap *dv/dt*

1.3 Solusi Analitis Permasalahan Penerjun Payung

Berikut ini akan diberikan contoh penyelesaian analitis dari problem penerjun payung. Jika seorang penerjun payung dengan massa 68,1 kg melakukan suatu terjun bebas, hitung kecepatannya setelah 12 detik sebelum payung terbuka. Hitung pula kecepatan akhirnya. Asumsikan koefisien gesekan udara, *c* = 12,5 kg/s. Gunakan selang waktu Δt = 2 detik.

Solusi :

Dari persamaan 1.10, dengan mensubstitusikan harga – harga *g*, *m* dan *c* :

$$v = \frac{9{,}8.(68{,}1)}{12{,}5}.\left(1 - e^{-(12{,}5/68{,}1)t}\right)$$

$$v = 53{,}39\left(1 - e^{-0{,}18355.t}\right)$$

Hasil perhitungan ditampilkan dalam tabel berikut :

t(detik)	*v*(m/s)
0	0,00
2	16,40
4	27,77
6	35,64
8	41,09
10	44,87
12	47,49
~	53,39

1.4 Solusi Numerik Permasalahan Penerjun Payung

Selanjutnya permasalahan dalam sub bab 1.3 akan didekati secara numerik, yaitu dengan menggunakan persamaan 1.12.b. Dengan memasukkan kondisi awal yaitu pada saat t_i = 0 detik, kecepatan, $v(t_i) = 0$ *m/s*, maka pada saat t_{i+1} = 2 detik, kecepatan akan menjadi :

$$v = 0 + \left[9{,}8 - \frac{12{,}5}{68{,}1}.(0) \right].(2-0) \text{ = 19,60 m/dt}$$

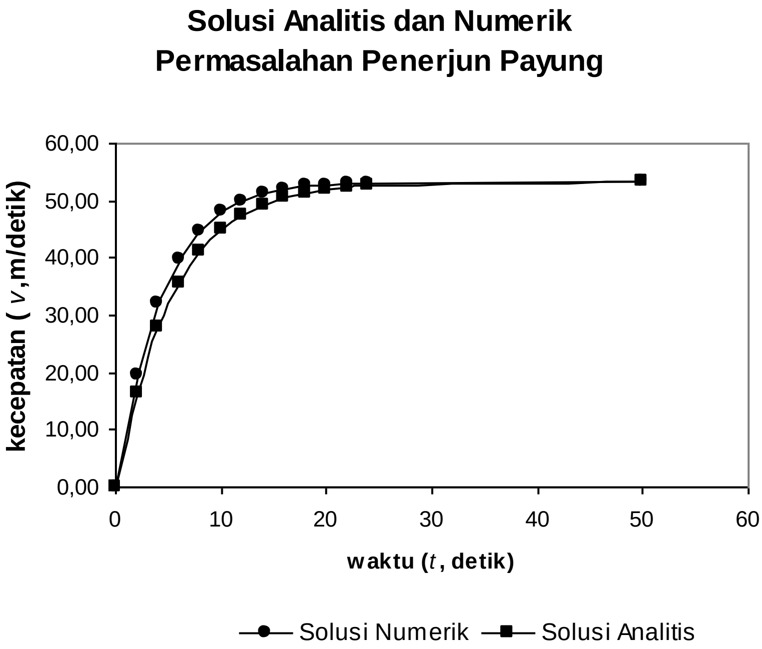
Untuk perhitungan selanjutnya, dengan t_i = 2 detik, t_{i+1} = 4 detik dan $v(t_i)$ = 19,60 m/dt, maka $v(t_{i+1})$ adalah :

$$v = 19{,}60 + \left[9{,}8 - \frac{12{,}5}{68{,}1}.(19{,}60) \right].(4-2) \text{= 32 m/dt}$$

Perhitungan selanjutnya dapat ditabelkan sebagai berikut :

t	$v(t_i)$
0	0,00
2	19,60
4	32,00
6	39,86
8	44,82
10	47,97
12	49,96
~	53,39

Plot grafik, hasil perhitungan secara analitis dan numerik ditampilkan dalam gambar 1.3 berikut ini.



Gb. 1.3 Grafik Solusi Analitis dan Numerik Permasalahan Penerjun Payung

Dari gambar 1.3 nampak bahwa terdapat sedikit perbedaan hasil antara solusi analitis (eksak) dengan solusi numerik. Perbedaan ini yang disebut dengan istilah *error* (kesalahan). Adanya error dalam pendekatan secara numerik dapat diminimalisasi dengan mengambil selang interval perhitungan yang lebih kecil. Sebagai pembanding coba lakukan perhitungan ulang secara numerik dengan menggunakan interval waktu yang lebih kecil. Semisal diambil Δt = 1 detik atau bahkan Δt = 0,5 detik. Namun dengan makin kecilnya interval ini akan makin melibatkan angka yang banyak, sehingga proses perhitungan secara manual akan memakan waktu. Denagn adanya banyak bahasa program yang dapat digunakan permasalahan ini akan dapat diminimalisir. Ada kalanya semakin kecil interval yang kita ambil akan memberikan solusi yang jauh dari kenyataan. Pada suatu batas interval tertentu, justru akan terjadi suatu kondisi yang sering disebut *ill condition*.

1.5 Kesalahan Absolut dan Kesalahan Relatif

Penyelesaian suatu model matematika secara numerik memberikan hasil aproksimasi/pendekatan yang berbeda dengan penyelesaian secara analitis. Adanya perbedaan inilah yang sering disebut sebagai *error*

(kesalahan). Hubungan antara nilai eksak, nilai perkiraan dan *error* dapat dirumuskan sebagai berikut :

Nilai eksak = aproksimasi + *error* 1.13 a

Dengan menyusun kembali persamaan 1.13 a maka akan diperoleh definisi dari kesalahan absolut (*absolute error*), yaitu :

Kesalahan absolut (E_t) = nilai eksak – aproksimasi 1.13 b

atau $E_t = p - p^*$ 1.13 c

Dan selanjutnya kita definisikan kesalahan relatif (*Relative error*) sebagai :

Kesalahan relatif (ε_t)= $\frac{E_t}{p} \times 100\%$ 1.14

Persamaan 1.13 hingga 1.14 hanya dapat dihitung bila nilai eksak diketahui. Dalam metode numerik, nilai eksak hanya akan diketahui bila fungsi yang dijumpai dapat diselesaikan secara analitis. Sehingga dalam metode numerik, aproksimasi sekarang ditentukan berdasarkan aproksimasi sebelumnya.

$$\varepsilon_a = \frac{p_x^{\ n+1} - p_x^{\ n}}{p_x^{\ n+1}} \times 100\% \qquad 1.15$$

Tanda untuk persamaan 1.13 hingga 1.15 dapat positif atau negatif. Jika aproksimasi lebih besar daripada nilai eksak (atau aproksimasi sebelumnya lebih besar daripada aproksimasi sekarang), maka errornya negatif. Dan sebaliknya jika aproksimasinya lebih kecil dari nilai eksak, maka errornya positif. Biasanya dalam metode numerik nilai mutlak kesalahan relatif disyaratkan lebih kecil dari suatu toleransi ε_S.

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_S \qquad 1.16$$

Contoh :

Siswa A mengukur panjang suatu jembatan, hasil pengukurannya menunjukkan panjang jembatan 9999 cm (panjang jembatan sesungguhnya adalah 10000 cm). Siswa B mengukur panjang suatu penggaris, hasil pengukurannya menunjukkan bahwa penggaris tersebut panjangnya adalah 9 cm (panjang sesungguhnya dari penggaris adalah 10 cm). Hitung kesalahan absolut dan kesalahan relatif dari kedua siswa tersebut !

Jawab :

a. Masalah panjang jembatan :

E_t = 10000 – 9999 = 1 cm

$\varepsilon_t = \frac{1}{10000} \times 100\%$ = 0,01%

b. Masalah panjang penggaris

E_t = 10 – 9 = 1 cm

$\varepsilon_t = \frac{1}{10} \times 100\%$ = 10%

Dari hasil di atas dapat disimpulkan bahwa siswa A ternyata lebih teliti dalam melaksanakan pengukurannya.

1.6 *Truncation Error*

Truncation error muncul sebagai hasil penggunaan aproksimasi (metoda numerik) untuk menggantikan prosedur matematika (analitis).

Deret Taylor dapat memberikan nilai hampiran bagi suatu fungsi pada suatu titik, berdasarkan nilai fungsi dan derivatifnya pada titik yang lain. Selanjutnya Deret Taylor akan kita bangun suku demi suku, suku pertama dari Deret Taylor adalah :

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) \qquad 1.17$$

Hubungan dalam 1.17 kita sebut aproksimasi orde nol, hubungan ini hendak menunjukkan bahwa nilai fungsi f pada titik yang baru, $f(x_{i+1})$ adalah sama dengan nilai fungsinya pada titik yang lama, $f(x_i)$. Namun 1.17 hanya akurat bila fungsi yang didekati adalah suatu konstanta. Bila fungsi mengalami perubahan dalam suatu selang interval, maka perlu penambahan suku dari persamaan 1.17, sehingga dikembangkan aproksimasi orde dua :

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f^{/}(x_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad 1.18$$

Suku tambahan dalam 1.18 terdiri dari kemiringan (slope) fungsi, $f^{/}(x_i)$ dikalikan dengan jarak antara x_{i+1} dan x_i. Persamaan 1.18 hanya cocok untuk fungsi linear saja. Selanjutnya dikembangkan aproksimasi orde dua yaitu :

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f^{/}(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f^{//}(x_i)}{2!}.(x_{i+1} - x_i)^2 \qquad 1.19$$

Dan secara umum, Deret Taylor adalah :

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f^{/}(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f^{//}(x_i)}{2!}.(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$+ \frac{f^{///}(x_i)}{3!}.(x_{i+1} - x_i)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}.(x_{i+1} - x_i)^n + R_n \qquad 1.20$$

Suku tambahan R_n, untuk menyertakan semua suku dalam selang n+1 sampai tak hingga, didefinsikan sebagai :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.(x_{i+1} - x_i)^{n+1} \qquad 1.21$$

Indeks n menyatakan aproksimasi orde ke-*n*, dan ξ adalah suatu nilai *x* dalam selang interval x_i hingga x_{i+1}. Pada umumnya Deret Taylor disederhanakan dengan mensubstitusikan $h = x_{i+1} - x_i$, sehingga :

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f^{/}(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f^{//}(x_i)}{2!}.h^2$$

$$+ \frac{f^{///}(x_i)}{3!}.h^3 + ... + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}.h^n + R_n \qquad 1.22$$

Dan suku tambahan R_n, adalah :

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.h^{n+1} \qquad 1.23$$

Contoh :

Gunakan aproksimasi hingga orde 4 dari Deret Taylor untuk menghampiri fungsi berikut :

$$f(x) = -0,1.x^4 - 0,15.x^3 - 0,5.x^2 - 0,25.x + 1,2$$

Dari x_i = 0 dan *h* = 1, prediksikan nilai pada x_{i+1} = 1 !

Karena telah diketahui, maka dapat kita hitung nilai fungsi dalam selang 0 hingga 1. Dari gambar 1.4 tampak fungsi dimulai dari *f(0)* = 1,2 dan kurva turun hingga *f(1)* = 0,2. Dari sini hendak ditunjukkan bahwa nilai eksak yang hendak kita prediksi adalah 0,2, namun nilai ini akan didekati dari Deret Taylor.

Aproksimasi Deret Taylor dengan n = 0 adalah : (persamaan 1.17)

$$f(x_{i+1}) \approx 1,2$$

Dalam gambar 1.4 aproksimasi orde nol adalah sebuah fungsi konstan, dengan :

$$E_t \quad = 0,2 - 1,2 = -1,0$$

pada x = 1.

Untuk n = 1, derivatif pertama harus ditentukan dan dievaluasi pada xi = 0 :

$$f^{/}(0) \quad = -0,4.(0)^3 - 0,45.(0)^2 - 1.(0) - 0,25 = -0,25$$

Sehingga aproksimasi orde satu adalah : (persamaan 1.18)

$$f(x_{i+1}) \approx 1,2 - 0,25.h$$

Dan dapat digunakan untuk menghitung $f(1) \approx 0,95$, dengan :

$$E_t \quad = 0,2 - 0,95 = -0,75 \qquad \text{pada } x = 1$$

Untuk n = 2, derivatif kedua dievaluasi pada $x_i = 0$

$$f^{//}(0) \quad = -1,2.(0)2 - 0,9.(0) - 1 = -1$$

Sesuai persamaan 1.19 :

$$f(x_{i+1}) \approx 1,2 - 0,25h - 0,5.h^2$$

Substitusikan h = 1, diperoleh $f(1) \approx 0,45$, dengan

$$E_t \quad = 0,2 - 0,45 = -0,25$$

Dan untuk aproksimasi orde keempat diperoleh :

$$f(x_{i+1}) \approx 1,2 - 0,25.h - 0,5.h^2 - 0,15.h^3 - 0,1.h^4$$

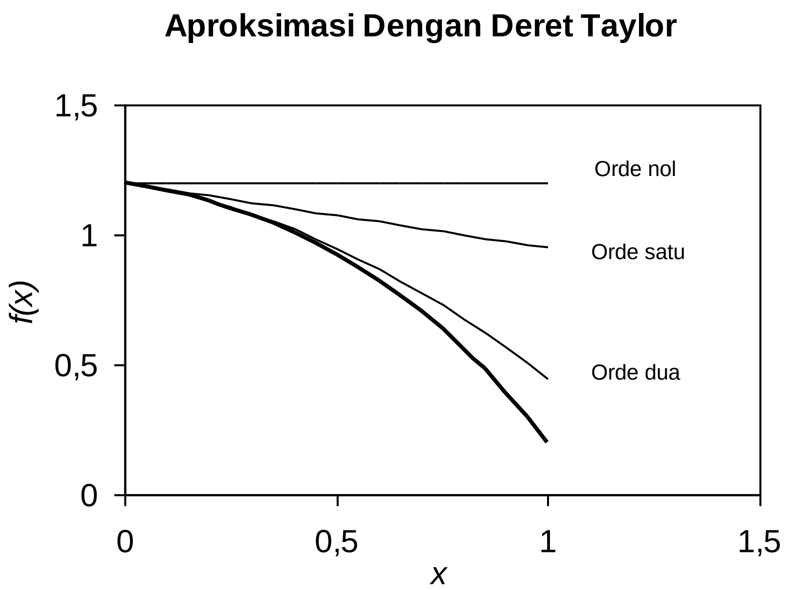
Dengan suku sisa :

$$R_4 = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}.h^5$$

Karena derivatif kelima dari polinomial orde 4 adalah nol, maka $R_4 = 0$, atau dengan kata lain aproksimasi orde 4 dari Deret Taylor memberikan nilai eksak pada $x_{i+1} = 1$, yaitu :

$$f(1) = 1,2 - 0,25.(1) - 0,5.(1)^2 - 0,15.(1)^3 - 0,1.(1)^4 = 0,2$$

Dari contoh di atas, secara umum dapat disimpulkan bahwa aproksimasi orde ke – *n* dari Deret Taylor akan memberikan nilai eksak bagi polinomial orde *n*. Namun untuk fungsi kontinu dan terdiferensial yang lain (seperti fungsi sinus, cosinus, atau fungsi eksponen), aproksimasi dengan Deret Taylor tak akan memberikan harga yang eksak. Dengan menggunakan suku – suku dari Deret Taylor yang lebih banyak, maka nilai aproksimasi akan cukup dekat dengan nilai eksak. Untuk mengetahui seberapa banyak suku yang diperlukan untuk memberikan hasil cukup dekat dengan nilai eksak, tergantung pada suku sisa dari Deret Taylor (persamaan 1.23).



Gambar 1.4 Aproksimasi Orde Nol, Satu Dan Dua Dengan Deret Taylor

Namun persamaan ini memiliki dua kelemahan utama, pertama bahwa nilai ξ tak diketahui secara pasti dan terletak antara x_i dan x_{i+1}. Kedua, untuk mengevaluasi 1.23 kita perlu mengetahui derivatif ke ($n+1$) dari polinomial, sehingga *f(x)* harus diketahui. padahal bila *f(x)* diketahui, kita dapat menghitung nilai eksaknya. Walaupun demikian persamaan 1.23 masih dapat kita gunakan untuk menghitung *truncation Error*. Hal ini disebabkan kita masih dapat mengontrol suku h^{n+1} dalam persamaan tersebut. Atau dengan kata lain kita dapat menentukan seberapa dekat nilai aproksimasi kita, dan banyaknya suku yang kita sertakan dalam hitungan. Persamaan 1.23 sering juga diungkapkan sebagai :

$$R_n = 0(h^{n+1}) \qquad 1.24$$

Penulisan $0(h^{n+1})$ mempunyai arti bahwa *truncation error* mempunyai orde h^{n+1}, atau bahwa *error* tersebut sebanding dengan ukuran langkah *h* dipangkatkan $n+1$.

Contoh :

Gunakan ekspansi Deret Taylor dengan n = 0 hingga 6 untuk mencari hampiran terbaik dari fungsi $f(x) = \cos x$, pada $x_{i+1} = \pi/3$ berdasarkan nilai *f(x)* dan derivatifnya pada $x_i = \pi/4$. Dalam soal ini $h = \pi/3 - \pi/4 = \pi/12$.

Karena fungsi telah diketahui, dapat dihitung nilai eksak f(π/3) = 0,5.

Aproksimasi orde nol memberikan :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}707106781$$

Dengan kesalahan relatif sebesar :

$$\varepsilon_t = \frac{0{,}5 - 0{,}707106781}{0{,}5} \text{ x } 100\% = -\ 41{,}4\%$$

Aproksimasi orde pertama adalah :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0{,}521986659$$

Dengan ε_t = – 4,40%

Dan aproksimasi orde kedua adalah :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).\left(\frac{\pi}{12}\right) - \frac{\cos(\pi/4)}{2}.\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 = 0{,}497754491$$

Dan ε_t = 0,449%. Perhitungan dapat dilanjutkan terus, dan hasilnya ditabelkan dalam tabel berikut :

Orde *n*	$f^{(n)}(x)$	f(π/3)	ε_t
0	*cos x*	0,707106781	– 41,4
1	– *sin x*	0,521986659	–4,4
2	– *cos x*	0,497754491	0,449
3	*sin x*	0,499869147	$2{,}62 \times 10^{-2}$
4	*cos x*	0,500007551	$-1{,}51 \times 10^{-3}$
5	– *sin x*	0,500000304	$-6{,}08 \times 10^{-5}$
6	– *cos x*	0,499999988	$2{,}40 \times 10^{-6}$

Perhatikan bahwa derivatif fungsi tak pernah sama dengan nol, seperti halnya contoh kasus polinomial sebelumnya. Namun semakin banyak suku dari Deret Taylor yang disertakan, maka kesalahan relatifnya juga semakin mengecil.

Suku Sisa Dari Ekspansi Deret Taylor

Misalkan kita memotong Deret Taylor setelah orde satu, maka diperoleh :

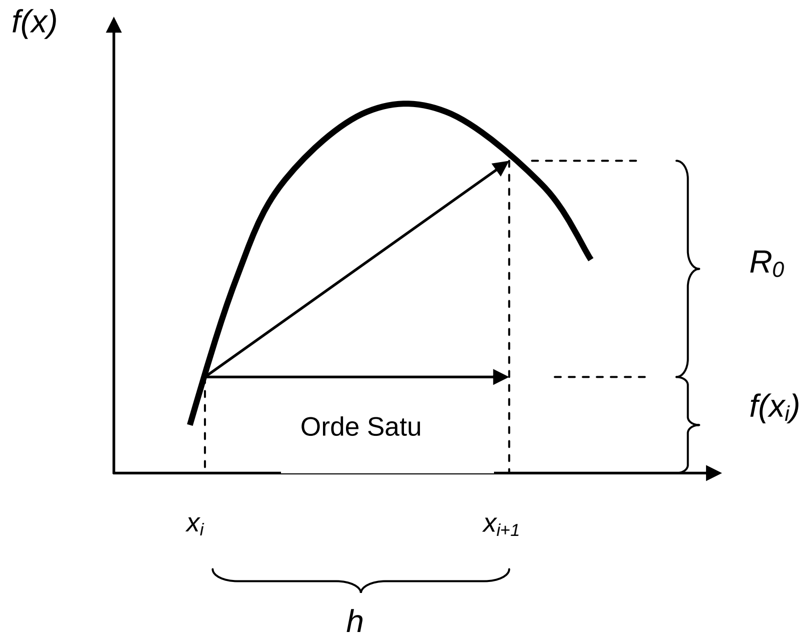
$f(x_{i+1}) \approx f(x_i)$

Maka suku sisanya adalah terdiri dari deret tak hingga :

$$R_0 = f^{/}(x_i).h + \frac{f^{//}(x_i)}{2!}.h^2 + \frac{f^{///}(x_i)}{3!}.h^3 + ...$$

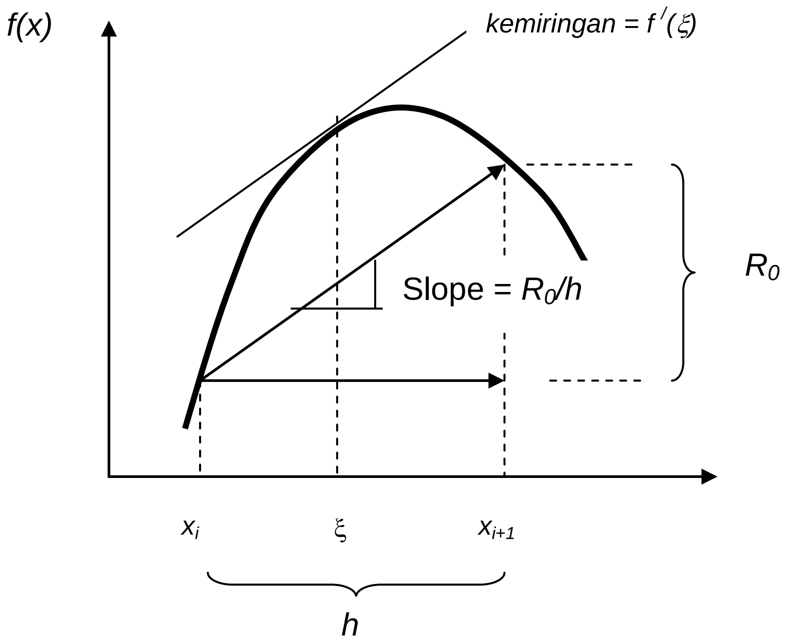
Namun dapat juga suku sisa kita potong menjadi :

$R_0 \approx f^{/}(x_i).h$



Gambar 1.5 Tinjauan Grafis Aproksimasi Orde Nol Dan Suku Sisa Deret Taylor

Teorema nilai rata – rata derivatif (*mean – value derivative theorem*) menyatakan bahwa jika fungsi $f(x)$ dan turunan pertamanya kontinu dalam selang x_i dan x_{i+1}, maka akan terdapat paling sedikit satu titik yang mempunyai kemiringan $f^{/}(\xi)$ yang sejajar dengan garis yang menghubungkan antara $f(x_i)$ dan $f(x_{i+1})$. Parameter ξ menunjukkan nilai x di mana kemiringan ini terjadi (gambar 1.6).



Gambar 1.6 Teorema Nilai Rata – Rata Derivatif

Dengan mengikutsertakan teorema ini, akan nampak bahwa kemiringan (slope) $f^{/}(\xi)$ adalah sama dengan kenaikan R_0 dibagi dengan panjang h, seperti dalam gambar 1.6., atau :

$$f^{/}(\xi) = R_0/h$$

Dan bila disusun kembali memberikan :

$$R_0 = f^{/}(\xi).h \qquad 1.25$$

Dengan demikian versi orde nol dari persamaan 1.23 telah diturunkan. Dan secara analogi, orde pertama dari 1.23 adalah :

$$R_1 = \frac{f^{//}(\xi)}{2!}.h^2 \qquad 1.26$$

Demikian seterusnya dapat dikembangkan dari persamaan 1.23.

Penggunaan Deret Taylor Untuk Menaksir *Truncation Error*

Kembali ke masalah penerjun payung dalam contoh sebenarnya, maka kecepatan penerjun payung, $v(t)$ dapat dihampiri dengan menggunakan ekspansi Deret Taylor sesuai persamaan 1.20.

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v^{/}(t_i).(t_{i+1} - t_i) + \frac{v^{//}(t_i)}{2!}.(t_{i+1} - t_i)^2 + \ldots + R_n \qquad 1.27$$

Jika 1.27 kita potong setelah suku turunan pertama :

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v^{/}(t_i).(t_{i+1} - t_i) + R_i \qquad 1.28$$

Persamaan 1.28 dapat diselesaikan untuk :

$$v^{/}(t_i) = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{R_1}{t_{i+1} - t_i} \qquad 1.29$$

Dari persamaan 1.21 dan 1.29 diperoleh hubungan :

$$v^{/}(t_i) = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{v^{//}(\xi)}{2!}.(t_{i+1} - t_i) \qquad 1.30$$

atau $$v^{/}(t_i) = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - 0\left(t_{i+1} - t_i\right) \qquad 1.31$$

Dari persamaan 1.31 dapat dikatakan bahwa *truncation error* – nya berorde $t_{i+1} - t_i$. Atau dengan kata lain jika ukuran langkah kita bagi dua, maka *truncation error*-nya akan menjadi setengahnya.

Contoh :

Gambar 1.7 merupakan plot fungsi dari $f(x) = x^m$, untuk m = 1,2,3,4 dari selang x = 1 hingga 2. Gunakan Deret Taylor untuk menghampiri fungsi ini untuk beragam nilai m dan ukuran langkah h.

Fungsi $f(x) = x^m$, dapat didekati dengan ekspansi Deret Taylor orde satu :

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + m.x_i^{m-1}.h \qquad 1.32$$

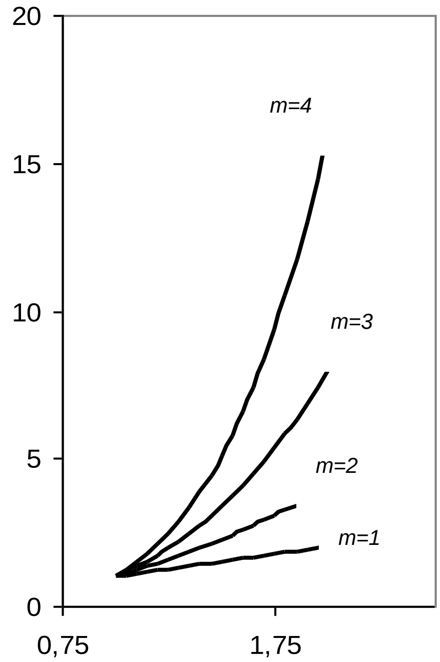
Dengan suku sisa :

$$R_1 = \frac{f^{//}(x_i)}{2!}.h^2 + \frac{f^{///}(x_i)}{3!}.h^3 + \frac{f^{(4)}(x_i)}{4!}.h^4 + ... \qquad 1.33$$

Untuk m = 1, nilai eksak $f(2) = 2$. Deret Taylor pada 1.32 memberikan :

$$f(2) = 1 + 1.(1) = 2$$

Dan $R_1 = 0$.



Gambar 1.7 Grafik Fungsi *f(x)*=x^m, Untuk *m* = 1,2,3,4

Untuk *m* = 2, maka nilai eksak *f*(2) = 4. Aproksimasi Deret Taylor orde 1 adalah :

$f(2) = 1 + 2(1) = 3$

Dan $R_1 = \frac{2}{2}.(1)^2 + 0 + 0 + \ldots.. = 1$

Aproksimasi Deret Taylor orde satu ini tak memberikan nilai eksak, namun perhatikanlah bahwa dengan menambahkan suku sisanya akan memberikan nilai eksak.

Untuk *m* = 3, maka *f*(2) = 8. Aproksimasi Deret Taylor orde 1 :

$f(2) = 1 + 3.(1)^2.1 = 4$

Serta $R_1 = \frac{6}{2}.(1)^2 + \frac{6}{6}.(1)^3 + 0 + 0 + \ldots.. = 4$

Sekali lagi suku sisa memberikan nilai penyimpangan yang eksak.!!

Untuk *m* = 4, *f*(2) = 16, dan aproksimasi Deret Taylor orde 1 adalah :

$f(2) = 1 + 4.(1)^3.1 = 5$

Dan $R_1 = \frac{12}{2}.(1)^2 + \frac{24}{6}.(1)^3 + \frac{24}{24}.(1)^4 + \ldots\ldots. = 11$

Dari tinjauan m = 1,2,3,4 nampak bahwa nilai R_1 akan makin bertambah besar dengan makin tak linearnya fungsi. Selanjutnya akan dipelajari bagaimana pengaruh ukuran langkah, h terhadap R_1 untuk m = 4.

$$f(x_{i+h}) = f(x_i) + 4.x_i^3.h$$

Jika f(1) = 1, maka :

$$f(x_{i+h}) = 1 + 4.h$$

Dan suku sisa sebesar :

$$R_1 = 6.h^2 + 4.h^3 + h^4$$

h	Eksak	Orde 1	R_1
1	16	5	11
0,5	5,0625	3	2,0625
0,25	2,441406	2	0,441406
0,125	1,601807	1,5	0,101807
0,0625	1,274429	1,25	0,024429
0,03125	1,130982	1,125	0,005982
0,015625	1,06398	1,0625	0,00148

Dari persamaan suku sisa nampak bahwa penyimpangan akan makin kecil seiring dengan mengecilnya nilai h (untuk nilai h cukup kecil, maka *error*nya akan sebanding dengan h^2). Atau dikatakan bila h diparuh, maka *error*nya akan menjadi seperempatnya.

Dan akhirnya kita dapat mengambil kesimpulan bahwa *error* (kesalahan) dari aproksimasi Deret Taylor orde 1 akan berkurang seiring dengan mengecilnya nilai m dan mengecilnya nilai h (ukuran langkah). Namun tentu saja nilai m sangat tergantung dari fungsi yang kita tinjau, sehingga untuk mendapatkan keakuratan yang baik, nilai h harus kita perkecil.

Diferensiasi Numerik

Dalam metoda numerik persamaan 1.29 dinamakan sebagai persamaan diferensi hingga (*finite difference*), yang secara umum :

$$f^{/}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + 0(x_{i+1} - x_i) \qquad 1.32.a$$

atau $$f^{/}(x_i) = \frac{\Delta f_i}{h} + 0(h) \qquad 1.32.b$$

Persamaan 1.32.a dan b hendak menggunakan data ke – *i* dan *i+1* untuk menghampiri turunan pertama dari *f(x)*. Oleh karena itu persamaan ini disebut sebagai Aproksimasi Diferensiasi Maju Dari Turunan Pertama. Selanjutnya Deret Taylor dapat diperluas mundur untuk menghitung nilai sebelumnya berdasarkan pada suatu nilai sekarang, yaitu :

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f^{/}(x_i).h + \frac{f^{//}(x_i)}{2!}.h^2 - ..... \qquad 1.33.a$$

Dan bila dipotong setelah suku turunan pertama, maka diperoleh :

$$f^{/}(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + 0(h) = \frac{\nabla f_i}{h} + 0(h) \qquad 1.33.b$$

Dengan *error* 0(*h*) dan ∇f_i disebut sebagai beda mundur pertama, dan persamaan 1.33.b disebut Aproksimasi Diferensiasi Mundur Dari Turunan Pertama.

Bila kita kurangkan persamaan 1.33.a dari deret maju Taylor (1.22), didapat :

$$f(x_{i+1}) = f(x_{i-1}) + 2.f^{/}(x_i).h + \frac{f^{///}(x_i)}{3}.h^3 + ... \qquad 1.34$$

Atau $$f^{/}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2.h} - \frac{f^{///}(x_i)}{6}.h^2 + ... \qquad 1.35$$

Atau $$f^{/}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2.h} - 0\left(h^2\right) \qquad 1.36$$

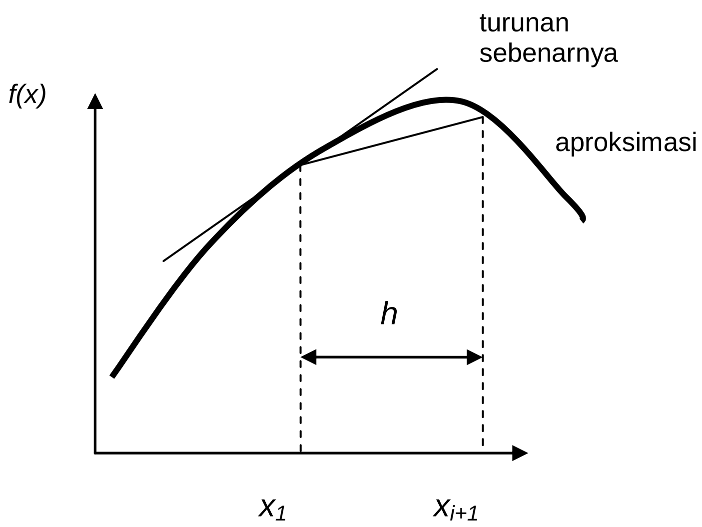
Persamaan 1.36 adalah merupakan Aproksimasi Diferensiasi Tengah dari Turunan Pertama. Coba bandingkan persamaan 1.32.a, 1.33.b dan 1.36, apa kesimpulan anda?

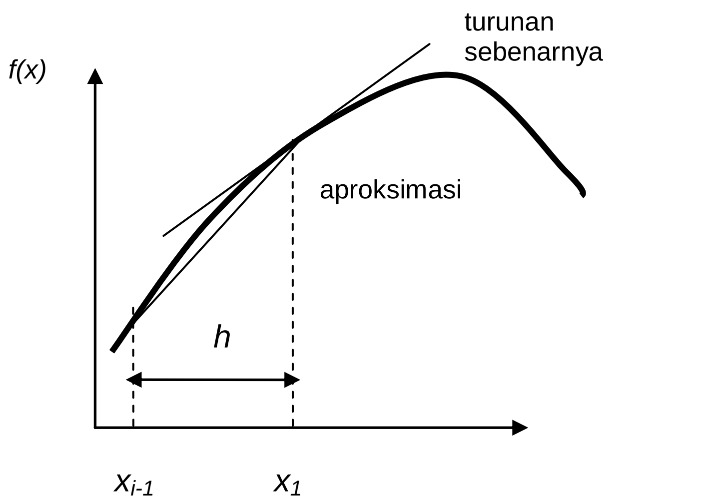
Contoh :

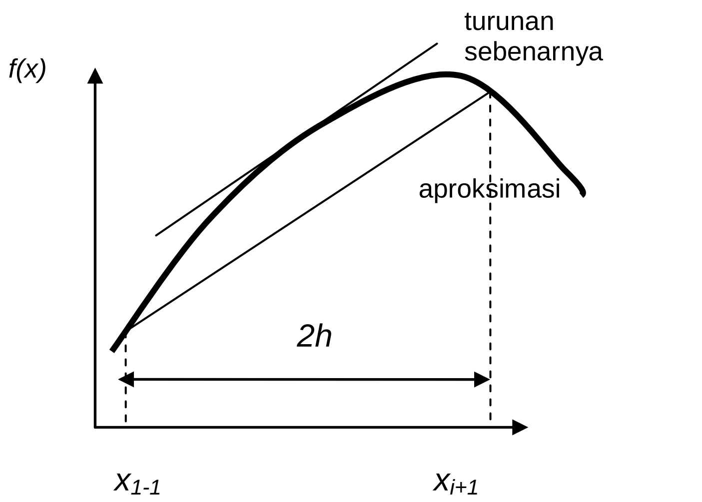
Gunakan Aproksimasi Diferensiasi Maju dan Mundur orde 0(*h*) dan Aproksimasi Diferensiasi Tengah orde 0(h^2) untuk menghampiri turunan pertama dari :

$$f(x) = -0{,}1.x^4 - 0{,}15.x^3 - 0{,}5.x^2 - 0{,}25 + 1{,}2$$

Pada titik x = 0,5 dengan ukuran langkah h = 0,5. Ulangi perhitungannya untuk h = 0,25.







Gambar 1.8 Grafik Aproksimasi Diferensiasi Maju, Mundur Dan Tengah

Turunan dari $f(x)$ dapat dihitung secara langsung, yakni :

$$f'(x) = -0{,}4.x^3 - 0{,}45.x^2 - 1{,}0.x - 0{,}25$$

Dan nilai eksak $f'(0{,}5) = -0{,}9125$.

Untuk $h = 0{,}5$, maka :

x_{i-1}	$= 0$	$f(x_{i-1})$	$= 1{,}2$
x_i	$= 0{,}5$	$f(x_i)$	$= 0{,}925$
x_{i+1}	$= 1{,}0$	$f(x_{i+1})$	$= 0{,}2$

Dan Aproksimasi Diferensiasi Maju dari persamaan 1.32.a :

$$f'(0{,}5) = \frac{0{,}2 - 0{,}925}{0{,}5} = -1{,}45 \qquad \varepsilon_t = -58{,}9\ \%$$

Aproksimasi Diferensiasi Mundur dari persamaan 1.33.b :

$$f'(0{,}5) \approx \frac{0{,}925 - 1{,}2}{0{,}5} = -0{,}55 \qquad \varepsilon_t = 39{,}7\%$$

Aproksimasi Diferensiasi Tengah dari persamaan 1.36 :

$$f'(0{,}5) \approx \frac{0{,}2 - 1{,}2}{1} = -1 \qquad \varepsilon_t = -9{,}6\%$$

Untuk $h = 0{,}25$, maka :

x_{i-1}	$= 0{,}25$	$f(x_{i-1})$	$= 1{,}10351563$
x_i	$= 0{,}5$	$f(x_i)$	$= 0{,}925$
x_{i+1}	$= 0{,}75$	$f(x_{i+1})$	$= 0{,}63632813$

Dan Aproksimasi Diferensiasi Maju :

$$f'(0{,}5) = \frac{0{,}63632813 - 0{,}925}{0{,}25} = -1{,}155 \qquad \varepsilon_t = -26{,}5\ \%$$

Aproksimasi Diferensiasi Mundur :

$$f'(0{,}5) \approx \frac{0{,}925 - 1{,}10351563}{0{,}25} = -0{,}714 \qquad \varepsilon_t = 21{,}7\%$$

Aproksimasi Diferensiasi Tengah :

$$f'(0{,}5) \approx \frac{0{,}63632813 - 1{,}10351563}{0{,}5} = -0{,}934 \qquad \varepsilon_t = -2{,}4\%$$

Dari hasil di atas nampaknya aproksimasi diferensiasi tengah memberikan nilai hampiran bagi turunan pertama $f(x)$ di titik 0,5 dengan error yang kecil. Perhatikan pula bahwa pengecilan ukuran langkah h juga memperkecil error.

Aproksimasi Diferensiasi Hingga Dari Turunan Yang Lebih Tinggi

Ekpansi Maju Deret Taylor untuk f(xi+2) dapat dituliskan sebagai :

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f^{/}(x_i).(2h) + \frac{f^{//}(x_i)}{2!}.(2h)^2 + ... \qquad 1.37$$

Bila persamaan Deret Taylor dalam 1.22 dikalikan 2 dan dikurangkan dari persamaan 1.37, akan memberikan bentuk :

$$f(x_{i+2}) - 2.f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f^{//}(x_i).h^2 + \ldots \qquad 1.38$$

Atau dapat dituliskan sebagai :

$$f^{//}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2.f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + 0(h) \qquad 1.39$$

Hubungan ini disebut Diferensiasi Hingga Maju Kedua (*Second Forward Finite Diffrence*). Selanjutnya dapat diturunkan versi diferensiasi mundurnya :

$$f^{//}(x_i) = \frac{f(x_i) - 2.f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + 0(h) \qquad 1.40$$

Dan diferensiasi tengahnya adalah :

$$f^{//}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2.f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + 0(h^2) \qquad 1.41$$

Masalah *Finite Difference* akan dipelajari lebih lanjut, dalam topik bahasan tentang penyelesaian suatu persamaan diferensial secara numerik.

1.7 Perambatan Kesalahan (*Error Propagation*)

Dalam sub bab ini akan dibahas bagaimana *error* (kesalahan) dapat merambat melalui fungsi matematis. Sebagai contoh bila kita mengalikan dua buah bilangan yang mempunyai *error*, maka akan kita taksir berapa *error* yang dihasilkannya.

Fungsi Dengan Satu Variabel Bebas

Misalkan fungsi *f(x)* tergantung pada perubah bebas *x*. Asumsikan bahwa $\bar{x}$ adalah aproksimasi dari *x*. Selanjutnya kita akan meninjau pengaruh penyimpangan antara *x* dan $\bar{x}$ terhadap fungsi. Atau dengan kata lain kita ingin mengestimasikan :

$$\Delta f(\bar{x}) = \left| f(x) - f(\bar{x}) \right| \qquad 1.42$$

Masalah dalam mengevaluasi $\Delta f(\bar{x})$ adalah bahwa *f(x)* tak diketahui sebab *x* juga tak diketahui. Kita dapat mengatasi masalah ini jika $\bar{x}$ cukup dekat dengan *x* dan $f(\bar{x})$ adalah kontinu dan terdiferensial. Jika kondisi ini terpenuhi, maka dengan Deret Taylor akan diperoleh :

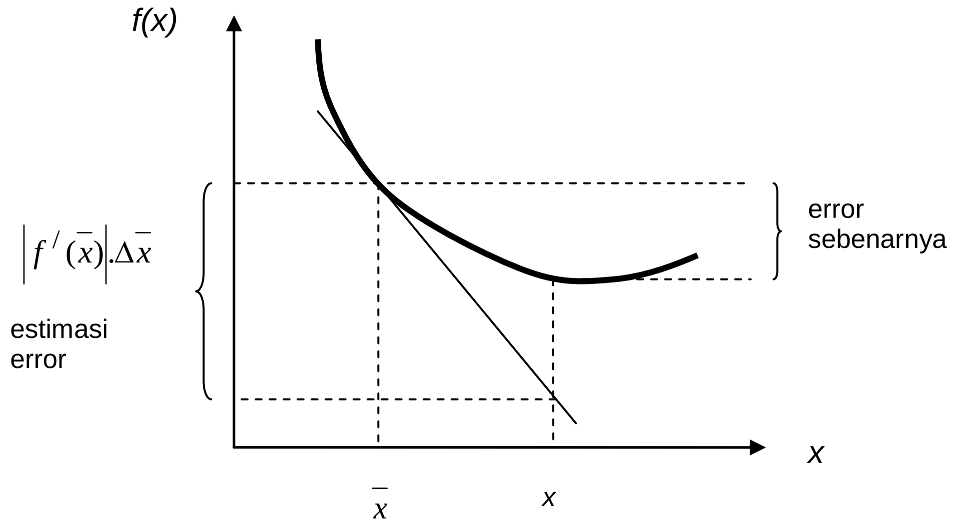
$$f(x) = f(\bar{x}) + f^{/}(\bar{x}).(x-\bar{x}) + \frac{f^{//}(\bar{x})}{2!}.(x-\bar{x})^2 + ... \qquad 1.43$$

Dengan menghilangkan orde kedua dan yang lebih tinggi, maka 1.43 dapat dibentuk menjadi :

$$f(x) - f(\bar{x}) \approx f^{/}(\bar{x}).(x - \bar{x}) \qquad 1.44$$

Atau $\Delta f(\bar{x}) = \left| f^{/}(\bar{x}) \right| .\Delta\bar{x}$ 1.45

Dengan $\Delta f(\bar{x}) = \left| f(x) - f(\bar{x}) \right|$ merepresentasikan estimasi *error* dari fungsi dan $\Delta\bar{x} = \left| x - \bar{x} \right|$ merepresentasikan estimasi *error* dari *x.* Persamaan 1.45 memberikan jalan untuk mengaproksimasi error dalam *f(x)* jika diberikan derivatif dari suatu fungsi dan taksiran *error* dari variabel bebasnya.Gambar 1.9 memberikan gambaran grafis dari permasalahan ini.



Gambar 1.9 Perambatan Error Orde Satu

Contoh :

Diketahui nilai $\bar{x}$ = 2,5 dengan error $\Delta\bar{x}$ = 0,01, taksirlah error yang dihasilkan dalam fungsi $f(x) = x^3$.

Dari persamaan 1.45 diperoleh :

$$\Delta f(\bar{x}) = \left| f^{/}(\bar{x}) \right| . \Delta\bar{x} \approx 3.(2,5)2.0,01 = 0,1875$$

Karena nilai f(2,5) = 15,625, maka dapat diramalkan bahwa :

$$f(2,5) = 15,625 \pm 0,1875$$

Atau dapat dikatakan bahwa nilai eksak terdapat antara 15,4375 dan 15,8125. Dalam kenyataannya jika *x* sebenarnya adalah 2,49 maka nilai fungsinya adalah 15,4382. Dan jika nilai *x* adalah 2,51 maka nilai fungsinya adalah 15,8132. Dalam kasus ini tampaknya analisa *error* orde satu memberikan taksiran cukup dekat dengan error sebenarnya.

Kestabilan Dan Kondisi

Dari Deret Taylor pertama :

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + f^{/}(\bar{x}).(x - \bar{x})$$

Hubungan ini dapat digunakan untuk menaksir kesalahan relatif dari *f(x)* :

$$\varepsilon\,[\,f(x)\,] = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} = \frac{f^{/}(\bar{x}).(x - \bar{x})}{f(\bar{x})} \qquad 1.49$$

Kesalahan relatif dari x adalah :

$$\varepsilon\,(x) = \frac{x - \bar{x}}{\bar{x}} \qquad 1.50$$

Rasio/perbandingan dari kedua kesalahan relatif ini disebut bilangan kondisi, yang dirumuskan sebagai :

$$\text{Bilangan kondisi} = \frac{\bar{x}.f^{/}(\bar{x})}{f(\bar{x})} \qquad 1.51$$

Bilangan kondisi merupakan suatu ukuran sejauh mana ketidakpastian dari *x* diperbesar oleh *f(x)*. Nilai menandakan bahwa kesalahan relatif fungsi identik dengan kesalahan relatif *x*. Nilai yang lebih besar dari 1 menandakan bahwa kesalahan relatif itu diperkuat, sedangkan nilai yang lebih kecil dari 1 menandakan bahwa kesalahan relatifnya diperlemah. Fungsi dengan nilai – nilai yang sangat besar disebut kondisi sakit (*ill – condition*).

1.8 Sumber – Sumber Error Yang Lain

Beberapa penyebab lain yang sering menimbulkan adanya kesalahan (*error*) dalam metoda numerik, adalah :

1. *Round-Off Error* : kesalahan yang terjadi akibat adanya pembulatan. Sebagai contoh adalah pembulatan untuk bilangan π, $\sqrt{7}$, *e* dan lain – lain.
2. Kesalahan akibat data yang tidak akurat
3. *Blunder :* yang dimaksud dengan blunder di sini adalah kesalahan akibat kecerobohan manusia, misalnya kesalahan dalam pembuatan program, atau perhitungan matematis
4. Kesalahan Pemodelan : kesalahan yang timbul akibat pemodelan yang salah terhadap suatu kasus.

BAB II

PENYELESAIAN PERSAMAAN NONLINEAR

2.1 Pendahuluan

Telah cukup lama kita kenal rumus ABC :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a.c}}{2a}$$

untuk menyelesaikan persamaan :

$f(x) = a.x^2 + b.x + c = 0$

Hasil hitungan dari rumus ABC merupakan akar – akar bagi persamaan tersebut. Akar – akar tersebut memberikan nilai – nilai *x* yang menjadikan persamaan itu sama dengan nol. Namun untuk bentuk – bentuk persamaan non-linear dengan derajat lebih dari dua, terkadang akan ditemui kesulitan untuk mendapatkan akar – akarnya. Untuk itu dalam bab ini dibahas mengenai metoda – metoda yang sering digunakan untuk mencari akar bagi persamaan non-linear tersebut.

2.2 Metoda Grafik

Metoda sederhana untuk mendapatkan akar perkiraan dari persamaan *f(x)* = 0 adalah dengan membuat plot dari fungsi dan mengamatinya di mana fungsi tersebut memotong sumbu *x*. Di titik ini, yang merepresentasikan nilai *x* yang membuat *f(x)* = 0, memberikan hampiran kasar bagi akar persamaan itu.

Contoh :

Dengan menggunakan metoda grafik, tentukan koefisien gesek udara c yang diperlukan agar penerjun payung dengan massa, *m* = 68,1 kg mempunyai kecepatan 40 m/s setelah terjun bebas selama *t* = 10 detik. (g = 9,8 m/s^2)

Jawab :

Dengan mensubstitusikan nilai – nilai *t* = 10 , *g* = 9,8, *v* = 40 dan *m* = 68,1 :

$$f(c) = \frac{9{,}8.(68{,}1)}{c}.\left(1 - e^{-(c/68{,}1).10}\right) - 40$$

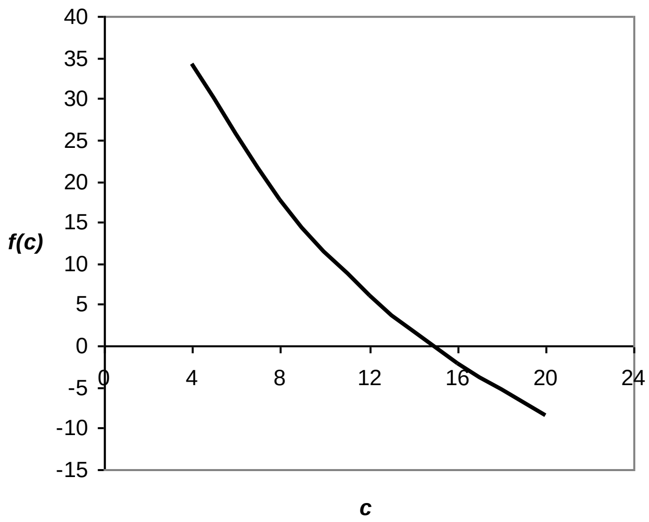
Atau :

$$f(c) = \frac{667{,}38}{c}.\left(1 - e^{-0{,}146843.c}\right) - 40$$

Beberapa harga c dapat disubstitusikan ke sisi kanan persamaan, sehingga diperoleh :

c	*f(c)*
4	34,115
8	17,653
12	6,067
16	-2,269
20	-8,401

Dan dapat digambarkan grafiknya :



Dari grafik nampak bahwa akar persamaan terletak antara 12 dan 16. Perkiraan kasar dari akar adalah 14,75. Bila kita substitusikan c = 14,75 ke dalam *f(c)*, maka :

$$f(14{,}75) = \frac{667{,}38}{14{,}75}.\left(1 - e^{-0{,}146843(14{,}75)}\right) - 40 = 0{,}059$$

Yang memberikan hasil cukup dekat dengan nol. Bila nilai *c* kita substitusikan ke dalam persamaan 1.10 :

$$v = \frac{9{,}8.(68{,}1)}{14{,}75}.\left(1 - e^{-(14{,}75/68{,}1).10}\right) = 40{,}059$$

Hasil ini cukup dekat dengan kecepatan yang disyaratkan, 40 m/s.

Kesulitan dalam metoda ini barangkali adalah usaha untuk membuat plot grafik fungsinya. Namun dengan tersedianya beberapa *software* (yang sederhana seperti MS Excell) dapat membantu kita. Hanya saja metoda ini tidak cukup akurat, karena bisa saja tebakan akar bagi orang yang satu berbeda dengan yang lain.

2.3 Metoda Interval Tengah (*Bisection Method*)

Jika fungsi $f(x)$ bernilai riil dan kontinu dalam selang $[x_l, x_u]$ serta $f(x_l)$ dan $f(x_u)$ berlawanan tanda, yakni :

$f(x_l).f(x_u) < 0$

maka pasti akan terdapat paling sedikit satu buah akar riil antara x_l dan x_u.

Langkah – langkah dalam menjalankan metoda interval tengah :

Langkah 1 : Pilih x_l sebagai batas bawah dan x_u sebagai batas atas untuk taksiran akar, sehingga terjadi perubahan tanda fungsi dalam selang interval tersebut. Atau dapat diperiksa apakah benar bahwa $f(x_l).f(x_u) < 0$

Langkah 2 : Taksiran nilai akar baru, x_r, diperoleh dari :

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2} \tag{2.1}$$

Langkah 3 : Lakukan evaluasi berikut, untuk menentukan dalam selang interval mana akar berada,

a) jika $f(x_l).f(x_r) < 0$, akar berada pada bagian interval bawah, maka $x_u = x_r$ dan kembali ke langkah 2
b) jika $f(x_l).f(x_r) > 0$, akar berada pada bagian interval atas maka $x_l = x_r$ dan kembali ke langkah 2.
c) Jika $f(x_l).f(x_r) = 0$, akar setara dengan x_r, hentikan perhitungan

Iterasi dapat dihentikan apabila kesalahan relatif-nya (ε_a) sudah lebih kecil dari syarat yang diberikan (ε_s), atau :

$$\left|\varepsilon_a\right| = \left|\frac{x_r^{\,baru} - x_r^{\,lama}}{x_r^{\,baru}}\right|.100\% \tag{2.2}$$

Contoh :

Carilah salah satu akar dari persamaan berikut :

$y = x^3 + x^2 - 3x - 3$

Disyaratkan bahwa batas kesalahan relatif $\varepsilon_a < 0{,}01\%$.

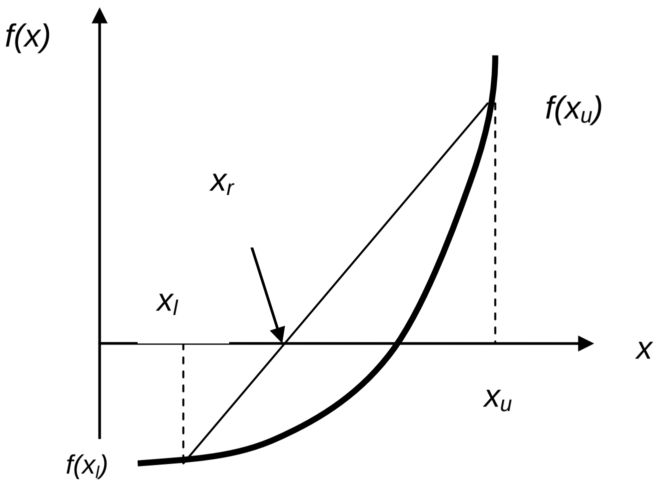
Hasil hitungan ditabelkan dalam tabel berikut :

Iterasi	x_l	x_u	x_r	$f(x_l)$	$f(x_u)$	$f(x_r)$	$f(x_l).f(x_r)$	$\varepsilon_a(\%)$
1	1	2	1,5	-4	3	-1,875	7,5	
2	1,5	2	1,75	-1,875	3	0,171875	-0,3222656	14,285714
3	1,5	1,75	1,625	-1,875	0,171875	-0,9433594	1,7687988	-7,6923077
4	1,625	1,75	1,6875	-0,9433594	0,171875	-0,4094238	0,3862338	3,7037037
5	1,6875	1,75	1,71875	-0,4094238	0,171875	-0,1247864	0,0510905	1,8181818
6	1,71875	1,75	1,734375	-0,1247864	0,171875	0,0220299	-0,002749	0,9009009
7	1,71875	1,734375	1,7265625	-0,1247864	0,0220299	-0,0517554	0,0064584	-0,4524887
8	1,7265625	1,734375	1,7304688	-0,0517554	0,0220299	-0,0149572	0,0007741	0,2257336
9	1,7304688	1,734375	1,7324219	-0,0149572	0,0220299	0,0035127	-5,254E-05	0,1127396
10	1,7304688	1,7324219	1,7314453	-0,0149572	0,0035127	-0,0057282	8,568E-05	-0,0564016
11	1,7314453	1,7324219	1,7319336	-0,0057282	0,0035127	-0,0011092	6,354E-06	0,0281928
12	1,7319336	1,7324219	1,7321777	-0,0011092	0,0035127	0,0012013	-1,333E-06	0,0140944
13	1,7319336	1,7321777	1,7320557	-0,0011092	0,0012013	4,596E-05	-5,098E-08	-0,0070477

Dari hasil hitungan menunjukkan bahwa akar persamaan adalah 1,7320557. Bandingkan dengan akar eksaknya yang nilainya adalah $\sqrt{3}$ = 1,73205080756......

2.4 Metoda Interpolasi Linear

Kekurangan dari metoda interval tengah adalah pembagian selang mulai dari x_l hingga x_u yang selalu sama, nilai fungsi $f(x_l)$ dan $f(x_u)$ tak diperhitungkan. Misalkan jika $f(x_l)$ jauh lebih dekat ke nol daripada $f(x_u)$, kemungkinan besar akar lebih dekat ke x_l daripada x_u. Metoda Interpolasi Linear dilakukan dengan menarik garis lurus antara $f(x_l)$ dan $f(x_u)$, titik potong garis ini dengan sumbu x kemudian kita jadikan sebagai x_r.



Gambar 2.1 Metoda Interpolasi Linear

Metoda Interpolasi Linear sering juga disebut Metoda *False-Position* atau Metoda *Regula Falsi*. Dengan menggunakan hubungan segitiga sebangun dari gambar 2.1, maka diperoleh hubungan :

$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u} \qquad 2.3$$

Kalikan silang persamaan 2.3 maka akan diperoleh :

$$f(x_l).(x_r - x_u) = f(x_u).(x_r - x_l) \qquad 2.4$$

Bila suku – sukunya dikumpulkan kembali :

$$x_r.[f(x_l) - f(x_u)] = x_u.f(x_l) - x_l.f(x_u) \qquad 2.5$$

Bagi dengan $f(x_l) - f(x_u)$:

$$x_r = \frac{x_u.f(x_l) - x_l.f(x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \qquad 2.6$$

Atau dapat dibentuk menjadi :

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u).(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \qquad 2.7$$

Persamaan 2.7 merupakan rumus bagi Metoda Interpolasi Linear ini. Langkah berikutnya sama dengan metoda Interval tengah.

Contoh :

Hitung kembali akar dari persamaan :

$$y = x^3 + x^2 - 3x - 3$$

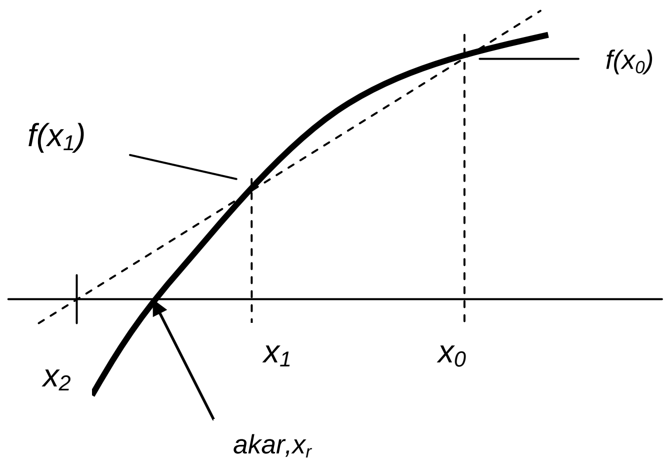
Dengan menggunakan Metoda Interpolasi Linear. Disyaratkan bahwa batas kesalahan relatif ε_a < 0,01%.

Iterasi	x_l	x_u	x_r	$f(x_l)$	$f(x_u)$	$f(x_r)$	$f(x_l)f(x_r)$	$\varepsilon_a(\%)$
1	1	2	1,571429	-4	3	-1,36443	5,457726	
2	1,571429	2	1,705411	-1,36443	3	-0,24775	0,338031	7,856304
3	1,705411	2	1,727883	-0,24775	3	-0,03934	0,009746	1,300546
4	1,727883	2	1,731405	-0,03934	3	-0,00611	0,00024	0,203427
5	1,731405	2	1,731951	-0,00611	3	-0,00095	5,78E-06	0,031524
6	1,731951	2	1,732035	-0,00095	3	-0,00015	1,38E-07	0,004878

Nampak hasil iterasi dengan menggunakan Metoda Interpolasi Linear lebih cepat konvergen dibandingkan dengan Metoda Interval Tengah.

2.5 Metoda Secant

Misalkan kita asumsikan bahwa *f(x)* adalah linear di sekitar akar x_r. Sekarang kita pilih titik lain x_1, yang dekat dengan x_0 dan juga dekat dengan x_r (yang sebelumnya kita belum tahu) lalu kita gambarkan garis lurus melewati dua titik itu. Gambar 2.2 mengilustrasikan hal ini.



Gambar 2.2 Ilustrasi Grafis Metoda Secant

Jika *f(x)* benar – benar linear, garis lurus itu akan memotong sumbu *x* tepat pada x_r. Namun kenyataannya *f(x)* jarang berupa fungsi linear, sebab kita tak akan menggunakan metoda ini pada fungsi linear. Hal ini berarti bahwa perpotongan garis lurus tadi dengan sumbu *x* tidak pada $x = x_r$, namun letaknya cukup berdekatan. Dari persamaan segitiga sebangun :

$$\frac{(x_0 - x_2)}{f(x_0)} = \frac{(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} \qquad 2.8$$

Atau bila diselesaikan untuk x_2 akan memberikan bentuk :

$$x_2 = x_0 - f(x_0).\frac{(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} \qquad 2.9$$

Contoh :

Hitung kembali akar dari persamaan :

$y = x^3 + x^2 - 3x - 3$

Dengan menggunakan Metoda Secant. Disyaratkan bahwa batas kesalahan relatif ε_a < 0,01%.

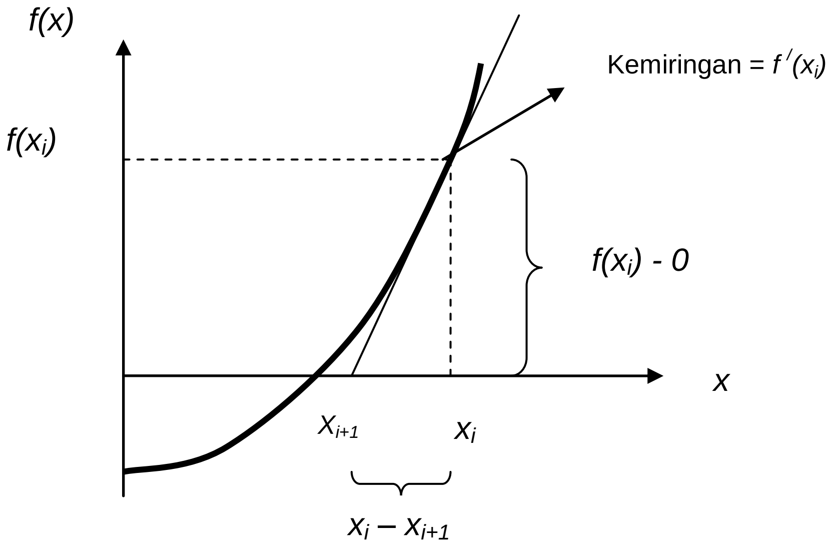
Hasil :

Iterasi	x_0	x_1	x_2	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\varepsilon_a(\%)$
1	1	2	1,571429	-4	3	
2	2	1,571429	1,705411	3	-1,36443	7,856304
3	1,571429	1,705411	1,735136	-1,36443	-0,24775	1,713119
4	1,705411	1,735136	1,731996	-0,24775	0,029255	-0,18126
5	1,735136	1,731996	1,732051	0,029255	-0,00052	0,003137
6	1,731996	1,732051	1,732051	-0,00052	-1E-06	6,34E-06

Bagaimana perbedaannya dengan Metoda Interpolasi Linear ???

2.6 Metoda Newton – Raphson

Metoda ini adalah metoda yang paling banyak digunakan. Dari terkaan nilai akar pertama x_i, (dengan nilai fungsi $f(x_i)$), maka dapat ditarik suatu garis singgung yang melewati titik [x_i, $f(x_i)$]. Secara gometris hal ini ditampilkan dalam gambar 2.3. Garis singgung ini akan memotong sumbu x, dan merupakan taksiran akar bagi iterasi berikutnya.



Gambar 2.3 Pelukisan Grafis Metoda Newton Raphson

Turunan pertama di x_i, setara dengan kemiringan :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} \qquad 2.10$$

Persamaan 2.10 dapat disusun kembali menjadi :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f^{/}(x_i)} \qquad 2.11$$

Persamaan 2.11 inilah yang disebut rumus Newton-Raphson.

Contoh :

Gunakan Metoda Newton-Raphson untuk menghitung akar dari persamaan :

$y = x^3 + x^2 - 3x - 3$

Hasil hitungan ditabelkan sebagai berikut :

Iterasi	x_i	$f(x_i)$	$f^{/}(x_i)$	ε_a (%)
1	2	3	13	
2	1,769231	0,360492	9,928994	-13,0435
3	1,732924	0,008267	9,474922	-2,09513
4	1,732051	4,72E-06	9,464108	-0,05037
5	1,732051	1,54E-12	9,464102	-2,9E-05

Diperoleh akar persamaan x = 1,732051

2.7 Metoda Iterasi Satu Titik : Metoda *x = g(x)*

Metoda yang dikenal sebagai metoda iterasi satu titik (dikenal juga sebagai metoda $x = g(x)$) adalah metoda yang sangat berguna untuk mencari akar dari $f(x) = 0$. Untuk menggunakan metoda ini, kita susun $f(x)$ menjadi bentuk lain yang ekuivalen yakni $x = g(x)$.

Bentuk iterasi satu titik ini dapat dituliskan dalam bentuk :

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad n = 0,1,2,3, ... \qquad 2.14$$

Contoh :

Gunakan metoda Iterasi Satu Titik untuk mendapatkan akar dari :

$x^3 - 3x - 20 = 0$

Hal pertama yang harus dikerjakan adalah menyusun kembali persamaan tersebut dalam bentuk x = g(x). Ada beberapa macam cara yang dapat ditempuh, antara lain :

1. $x = (3x+20)^{1/3}$
2. $x = \dfrac{x^3 - 20}{3}$

3. $x = \dfrac{20}{x^2 - 3}$

4. $x = (3 + 20/x)^{1/2}$

Dari rumusan pertama dapat dinyatakan persamaan iterasinya sebagai :

$x_{n+1} = (3.x_n + 20)^{1/3}$ dengan n = 1,2,3, ...

Jika diambil nilai awak x_0 = 5, maka :

x_1 = (3x5 + 20)$^{1/3}$ = 3,271066

x_2 = (3x3,271066 + 20)$^{1/3}$ = 3,10077

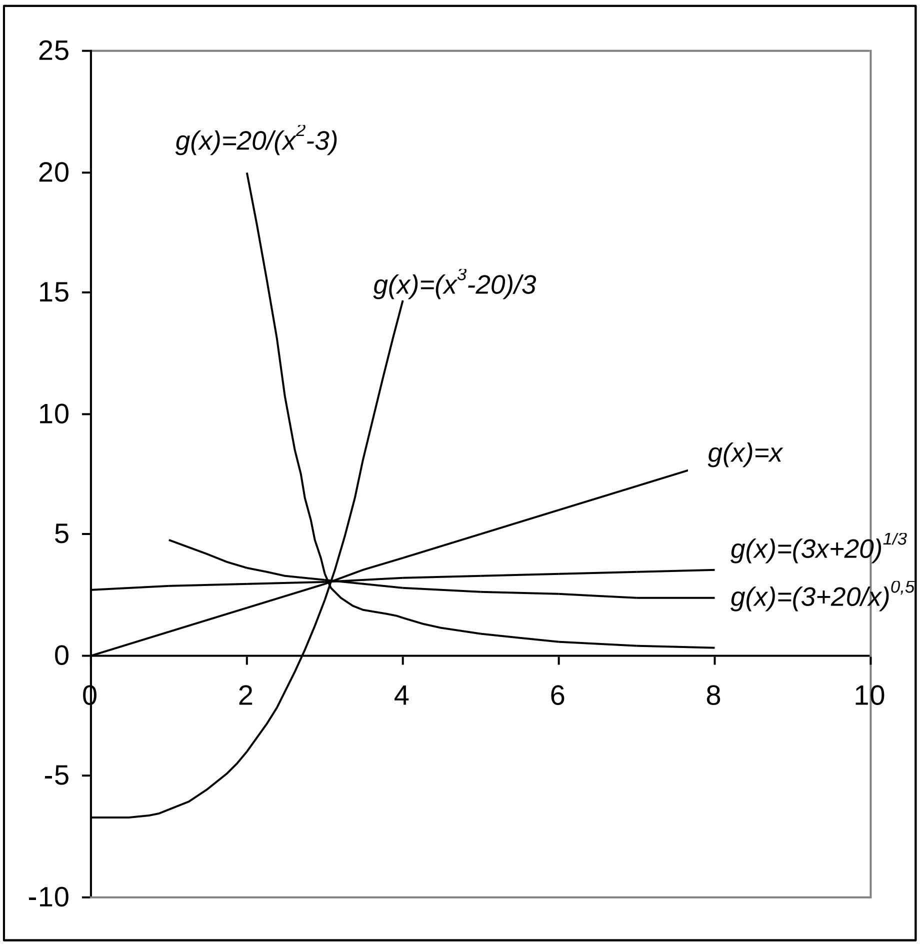
Dan seterusnya, hasilnya ditabelkan sebagai berikut :

Iterasi	X	g(x)	ε_a (%)
1	5	3,271066	
2	3,271066	3,10077	-5,49207
3	3,10077	3,082956	-0,57783
4	3,082956	3,08108	-0,06087
5	3,08108	3,080883	-0,00641
6	3,080883	3,080862	-0,00068

Selanjutnya hal yang sama dilakukan terhadap persamaan yang kedua, ketiga dan keempat. Hasil iterasi ditampilkan dalam tabel berikut :

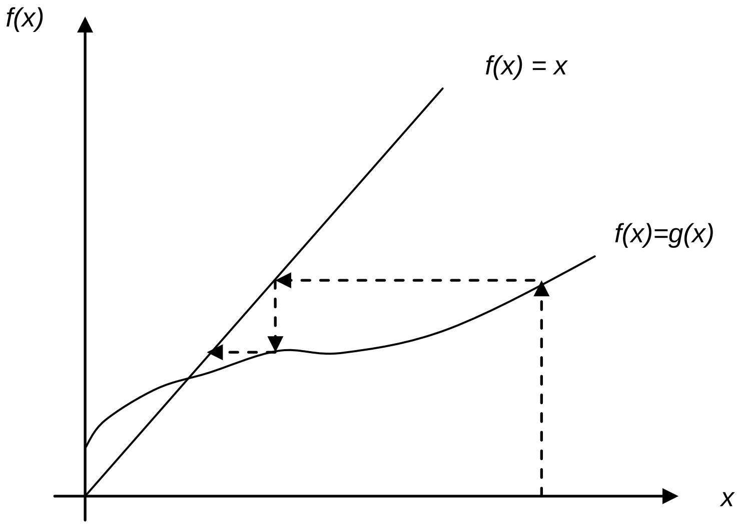
Iterasi	pers.2	pers.3	pers.4
1	35	0,909091	2,645751
2	14285	-9,20152	3,249506
3	9,72E+11	0,244894	3,025687
4	3,06E+35	-6,80266	3,100011
5		0,462148	3,074344
6		-7,17767	3,083092
7		0,41221	3,080097
8		-7,06693	3,08112
9			3,08077
10			3,08089

Dari hasil di atas nampaknya persamaan 2 dan 3 memberikan hasil yang tidak konvergen. Dan persamaan 4 seperti halnya persamaan 1 mampu memberikan nilai akar yang kita cari. Selanjutnya perhatikan gambar 2.5 berikut yang menunjukkan bagaimana sebenarnya grafik masing – masing fungsi tersebut.



Gambar 2.5 Beberapa Bentuk Fungsi *x = g(x)*

Dari gambar 2.5 nampaknya grafik $g(x) = 20/(x^2 - 3)$ dan $g(x) = (x^3 - 20)/3$ memiliki kemiringan yang lebih tajam daripada $g(x) = x$ di dekat nilai akar. Sedangkan untuk $g(x) = (3+20/x)^{0,5}$ dan $g(x) = (3x + 20)^{1/3}$, memiliki kemiringan yang tak setajam kemiringan $y = x$ di dekat nilai 3. Atau secara matematis hal ini berarti $\left|g^{/}(x)\right| < 1$ di dekat nilai akar. Dengan demikian kekonvergenan dari metode iterasi satu titik dapat dilacak dari perilaku derivatif pertama fungsi. Dalam gambar 2.6 derivatif $g(x)$ berada pada nilai $0 < g^{/}(x) < 1$ untuk hasil iterasi yang konvergen.



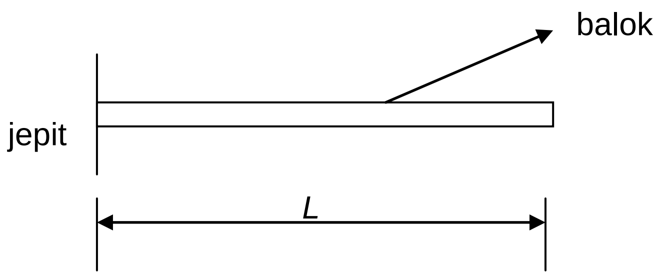
Gambar 2.6 Derivatif Fungsi $g^{l}(x)$ <1

2.8 Penerapan Dalam Bidang Rekayasa Teknik Sipil

2.8.1 Bidang Rekayasa Struktur

Contoh 1 : Frekuensi alami dari getaran bebas (free vibration) balok uniform yang terjepit pada salah satu ujungnya dan bebas pada ujung yang lain dapat dicari dari persamaan berikut

$$\cos(\beta L)\cosh(\beta L) = -1 \qquad \text{(i)}$$



Dengan :

$\beta_n \quad = \sqrt{\dfrac{\omega_n}{a}}$

$a^2 \quad = \dfrac{E.I}{\rho.A}$

L = panjang elemen balok = 2 meter

ρ = berat jenis elemen balok

ω = frekuensi alami balok (rad/dt)

EI = kekakuan lentur balok

Tetapkan nilai β_n dari persamaan (a), untuk 3 mode yang pertama (n = 1,2 dan 3) kemudian gunakan nilai β untuk menentukan frekuensi alami balok. Gunakan metode Secant untuk menyelesaikannya !

Hitungan untuk 3 mode pertama disajikan dalam tabel berikut :

Mode pertama (n = 1) :

Iterasi	β_0	β_1	β_2	f(β_0)	f(β_1)	f(β_2)	Error
1	1	2	0,965265	-0,5656258	-16,849852	-0,2388208	
2	2	0,965265	0,950389	-16,849852	-0,2388208	-0,1082552	-1,56532
3	0,965265	0,950389	0,938054	-0,2388208	-0,1082552	-0,0041591	-1,31491
4	0,950389	0,938054	0,937561	-0,1082552	-0,0041591	-7,731E-05	-0,05256
5	0,938054	0,937561	0,937552	-0,0041591	-7,731E-05	-5,697E-08	-0,001
6	0,937561	0,937552	0,937552	-7,731E-05	-5,697E-08	-7,807E-13	-7,3E-07
7	0,937552	0,937552	0,937552	-5,697E-08	-7,807E-13	0	-1E-11
8	0,937552	0,937552	0,937552	-7,807E-13	0	0	0

Diperoleh β_1 = 0,937552

Mode kedua (n = 2) :

Iterasi	β_0	β_1	β_2	f(β_0)	f(β_1)	f(β_2)	Error
1	2	3	2,079657	-16,849852	194,68136	-15,821156	
2	3	2,079657	2,148829	194,68136	-15,821156	-13,816454	3,21906
3	2,079657	2,148829	2,625564	-15,821156	-13,816454	49,9419491	18,15745
4	2,148829	2,625564	2,252137	-13,816454	49,9419491	-8,3404397	-16,581
5	2,625564	2,252137	2,305576	49,9419491	-8,3404397	-4,0840141	2,317809
6	2,252137	2,305576	2,35685	-8,3404397	-4,0840141	1,07311574	2,175541
7	2,305576	2,35685	2,346181	-4,0840141	1,07311574	-0,0925913	-0,45475
8	2,35685	2,346181	2,347029	1,07311574	-0,0925913	-0,0018301	0,036108
9	2,346181	2,347029	2,347046	-0,0925913	-0,0018301	3,2267E-06	0,000728
10	2,347029	2,347046	2,347046	-0,0018301	3,2267E-06	-1,121E-10	-1,3E-06
11	2,347046	2,347046	2,347046	3,2267E-06	-1,121E-10	2,3648E-14	4,45E-11
12	2,347046	2,347046	2,347046	-1,121E-10	2,3648E-14	2,3648E-14	0

Diperoleh β_2 = 2,347046

Mode ketiga (n = 3) :

Iterasi	β_0	β_1	β_2	f(β_0)	f(β_1)	f(β_2)	Error
1	3	4	3,474201	194,68136	-215,86477	410,71139	
2	4	3,474201	3,818854	-215,86477	410,71139	223,636235	9,025049
3	3,474201	3,818854	4,230865	410,71139	223,636235	-1349,5328	9,738219
4	3,818854	4,230865	3,877424	223,636235	-1349,5328	116,441905	-9,11535

5	4,230865	3,877424	3,905498	-1349,5328	116,441905	54,0186583	0,718825
6	3,877424	3,905498	3,929792	116,441905	54,0186583	-6,2564377	0,618198
7	3,905498	3,929792	3,92727	54,0186583	-6,2564377	0,27938128	-0,06421
8	3,929792	3,92727	3,927378	-6,2564377	0,27938128	0,0013436	0,002745
9	3,92727	3,927378	3,927379	0,27938128	0,0013436	-2,909E-07	1,33E-05
10	3,927378	3,927379	3,927379	0,0013436	-2,909E-07	-8,682E-14	-2,9E-09
11	3,927379	3,927379	3,927379	-2,909E-07	-8,682E-14	-8,682E-14	0

Diperoleh β_3 = 3,927379

Selanjutnya nilai frekuensi alami balok ω_n diperoleh dari persamaan :

$$\beta_n = \sqrt{\frac{\omega_n}{a}} \quad \rightarrow \quad \omega_n = \beta_n^2.a$$

Sehingga diperoleh :

$$\omega_1 = (0{,}937552)^2.a^{1/2} = 0{,}879.\left(\frac{E.I}{\rho.A}\right)^{1/2} \text{ rad/det}$$

$$\omega_2 = (2{,}347046)^2.a^{1/2} = 5{,}5086.\left(\frac{E.I}{\rho.A}\right)^{1/2} \text{ rad/det}$$

$$\omega_3 = (3{,}927379)^2.a^{1/2} = 15{,}4243.\left(\frac{E.I}{\rho.A}\right)^{1/2} \text{ rad/det}$$

Contoh 2 : Dari model “*lumped mass*“ bangunan 3 lantai, diperoleh persamaan karakteristik sbb :

$$\begin{bmatrix} (4-3\lambda_i) & -1 & 0 \\ -1 & (3-2{,}5\lambda_i) & -1 \\ 0 & -1 & (1-2\lambda_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Penyelesaian persamaan ini mengambil bentuk persamaan non linear dari nilai determinan = 0 !

Pertanyaan :

a. Berapa derajat polinomial dari determinan persamaan?
b. Selesaikan persamaan untuk memperoleh λ_1, λ_2, λ_3 !
   (λ_1, λ_2, λ_3 selanjutnya disebut eigen value)
c. Dari hasil eigen value tentukan eigen vector atau mode dari persamaan. Misalkan nilai x_3 = 1, sehingga besaran – besaran x_1 dan x_2 dapat dinyatakan sebagai fungsi perbandingan x_3 !

Selesaikan nilai λ_i dengan mengambil determinan persamaan sama dengan nol sebagai berikut :

$$\begin{vmatrix} (4-3\lambda_i) & -1 & 0 \\ -1 & (3-2{,}5\lambda_i) & -1 \\ 0 & -1 & (1-2\lambda_i) \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-3\lambda_i)\begin{bmatrix} (3-2{,}5\lambda_i) & -1 \\ -1 & (1-2\lambda_i) \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & (1-2\lambda_i) \end{bmatrix} + 0 = 0$$

$$(4-3\lambda_i)\{(3-2{,}5\lambda_i)(1-2\lambda_i)-1\} + \{-1+2\lambda_i\} = 0$$

$$(4-3\lambda_i)(3-6\lambda_i-2{,}5\lambda_i+5\lambda_i^2-1)-1+2\lambda_i = 0$$

$$(4-3\lambda_i)(5\lambda_i^2-8{,}5\lambda_i+2)-1+2\lambda_i = 0$$

$$(20\lambda_i^2-34\lambda_i+8-15\lambda_i^3+25{,}5\lambda_i^2-6\lambda_i)-1+2\lambda_i = 0$$

$-15\lambda_i^3 + 45{,}5\ \lambda_i^2 - 38\ \lambda_i + 7 = 0$

$f(\lambda_i) \quad = -15\lambda_i^3 + 45{,}5\ \lambda_i^2 - 38\ \lambda_i + 7$

$f^{/}(\lambda_i) \ = -\ 45\ \lambda_i^2 + 91\ \lambda_I - 38$

$$\boldsymbol{\lambda_{i+1} = \lambda_i} - \frac{f(\lambda_i)}{f^{/}(\lambda_i)}$$

Mencari eigen value pertama :

Iterasi	λi	f(λi)	f / (λi)	εa(%)
1	0.5	-2.5	-3.75	
2	-0.16667	14.66667	-54.4167	400
3	0.102859	3.556435	-29.116	262.0347
4	0.225006	0.582462	-19.8027	54.28625
5	0.254419	0.030222	-17.7607	11.56095
6	0.256121	9.85E-05	-17.6449	0.664393
7	0.256126	1.06E-09	-17.6445	0.00218
8	0.256126	0	-17.6445	2.34E-08
9	0.256126	0	-17.6445	0

Diperoleh λ_1 = 0,256126

Mencari eigen value kedua :

Iterasi	λi	F(λi)	f / (λi)	εa(%)
1	1	-0.5	8	
2	1.0625	-0.00171	7.886719	5.882353

3	1.062717	-1.1E-07	7.885714	0.02039
4	1.062717	0	7.885714	1.3E-06
5	1.062717	0	7.885714	0

Diperoleh λ_2 = 1,062717

Mencari eigen value ketiga :

Iterasi	λi	f(λi)	f $^{/}$(λi)	εa(%)
1	2	-7	-36	
2	1.805556	-1.57221	-20.3958	-10.7692
3	1.728471	-0.20556	-15.1517	-4.45971
4	1.714904	-0.0059	-14.284	-0.79111
5	1.714491	-5.4E-06	-14.2579	-0.02411
6	1.71449	-4.6E-12	-14.2578	-2.2E-05
7	1.71449	-1.4E-14	-14.2578	-1.9E-11
8	1.71449	0	-14.2578	-5.2E-14
9	1.71449	0	-14.2578	0

Diperoleh λ_3 = 1,71449

Mencari eigen vektor mode 1 :

λ_1 = 0,256126

$$\begin{bmatrix} 3{,}231622 & -1 & 0 \\ -1 & 2{,}359685 & -1 \\ 0 & -1 & 0{,}487748 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$3{,}231622\, x_1 - x_2 \quad = 0 \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$

$-x_1 + 2{,}359685\, x_2 - x_3 \quad = 0 \ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$

$-x_2 + 0{,}487748\, x_3 \quad = 0 \ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$

$x_3 = 1 \rightarrow -x_2 + 0{,}487748\ (1) \quad = 0 \ldots\ldots\ldots \text{(iii)} \rightarrow x_2 = 0{,}487748$

$3{,}231622\, x_1 - 0{,}487748 = 0 \ldots \text{(i)} \quad \rightarrow x_1 = 0{,}15093$

$\therefore$ **eigen vektor mode 1** : $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}15093 \\ 0{,}487748 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Mencari eigen vektor mode 2 :

λ_2 = 1,062717

$$\begin{bmatrix} 0{,}811849 & -1 & 0 \\ -1 & 0{,}3432075 & -1 \\ 0 & -1 & -1{,}125434 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$0{,}4811849\ x_1 - x_2 = 0$……..(i)

$-x_1 + 0{,}3432075\ x_2 - x_3 = 0$……..(ii)

$-x_2 - 1{,}125434\ x_3 = 0$…….(iii)

$x_3 = 1 \rightarrow -x_2 - 1{,}125434\ (1) = 0$…….(iii) $\rightarrow x_2 = -1{,}125434$

$0{,}811849\ x_1 - (-1{,}125434) = 0$..(i) $\rightarrow x_1 = -1{,}38626$

$\therefore$ **eigen vektor mode 2** : $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1{,}38626 \\ -1{,}125434 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Mencari eigen vektor mode 3 :

λ_3 = 1,71449

$$\begin{bmatrix} -1{,}14347 & -1 & 0 \\ -1 & -1{,}286225 & -1 \\ 0 & -1 & -2{,}42898 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$-1{,}\ 14347\ x_1 - x_2 = 0$…….(i)

$-x_1 - 1{,}286225\ x_2 - x_3 = 0$…….(ii)

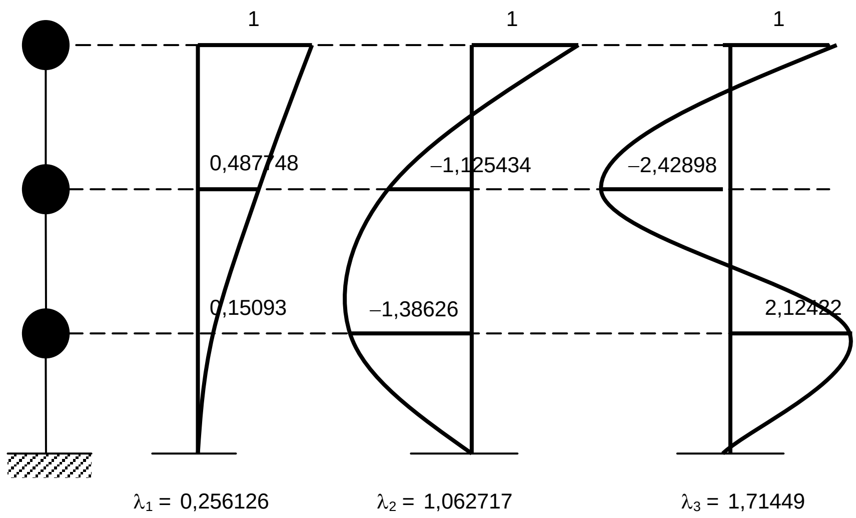
$-x_2 - 2{,}42898\ x_3 = 0$……(iii)

$x_3 = 1 \rightarrow -x_2 - 2{,}42898\ (1) = 0$…..(iii) $\rightarrow x_2 = -2{,}42898$

$-1{,}14347\ x_1 - (-2{,}42898) = 0$….(i) $\rightarrow x_1 = 2{,}12422$

$\therefore$ **eigen vektor mode 3 :** $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2{,}12422 \\ -2{,}42898 \\ 1 \end{Bmatrix}$

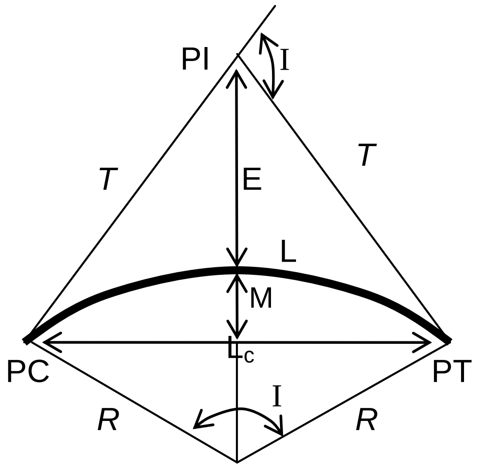
Selanjutnya mode shape dari tiap – tiap mode dapat digambarkan sebagai berikut :



2.8.2 Bidang Rekayasa Transportasi

Perhitungan panjang lengkung / busur jalan dengan parameter – parameter :

PC = titik kurvatur, PT = titik tangensial, PI = titik perpotongan.



Kurva mempunyai 7 elemen :

1. Radius kurva, R
2. Sudut lengkung, I
3. Jarak tangensial, T
4. Panjang kurva, L
5. Panjang busur, Lc
6. Ordinat tengah, M
7. Jarak luar, E

Hubungan antara kelengkungan dan jari – jari :

$$R = \frac{L_c(R+E)}{2\sqrt{2RE+E^2}} \quad \text{dan} \quad R = \frac{L_c}{2\sin\left(\frac{90^0 L}{\pi R}\right)}$$

Dengan nilai E = 195 m, L_c = 650 m, cari : harga R dan L !

$$R = \frac{L_c(R+E)}{2\sqrt{2RE+E^2}} = \frac{650(R+195)}{2\sqrt{390R+38025}}$$

Gunakan metode x = g(x) dalam hal ini : R = g(R)

R =

R	g(R)	ε
500	467.9149	
467.9149	458.8019	-6.85703
458.8019	456.186	-1.98626
456.186	455.4328	-0.57343
455.4328	455.2158	-0.16538
455.2158	455.1532	-0.04768
455.1532	455.1352	-0.01375
455.1352	455.13	-0.00396
455.13	455.1285	-0.00114
455.1285	455.1281	-0.00033
455.1281	455.1279	-9.5E-05
455.1279	455.1279	-2.7E-05

Diperoleh nilai *R* = **455,1279 m**

$$\frac{L_c}{2\sin\left(\dfrac{90^0 L}{\pi * R}\right)} \rightarrow \quad 455{,}1279$$

$$= \frac{650}{2\sin\left(\dfrac{90^0 L}{\pi * 455{,}1279}\right)}$$

$$2\sin\left(\frac{90^0 L}{\pi * 455{,}1279}\right) = 1{,}428169972$$

Jika diselesaikan akan didapatkan L = 723,9411663 m = 723,9412 m

2.8.3 Bidang Rekayasa Sumber Daya Air

Contoh 1 : Hubungan antara debit air Q penampang saluran terbuka berbentuk trapesium terhadap parameter geometri penampang adalah :

$$Q = \frac{1}{n}.\left[\frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z}}\right]^{2/3}.S^{1/2}.(b+zy).y$$

dengan : b = lebar dasar penampang

y = ketinggian air

z = kemiringan dinding

S = kemiringan saluran

N = angka Manning

jika S = 0,009, n = 0,025, z = 0,15, b = 50 cm dan $Q_{rencana}$ = 0,83 m^3/dt. Hitung besarnya y!

$$Q = \frac{1}{n}.\left[\frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z}}\right]^{2/3}.S^{1/2}.(b+zy).y$$

Substitusikan nilai – nilai yang diketahui ke dalam persamaan tersebut :

$$0{,}83 = \frac{1}{0{,}025}.\left[\frac{(0{,}5+0{,}15y)y}{0{,}5+2y\sqrt{1+0{,}15}}\right]^{2/3}.\sqrt{0{,}009}.(0{,}5+0{,}15y)$$

$$y = \frac{0{,}02075}{\left[\frac{(0{,}5+0{,}15y)y}{0{,}5+2{,}144761059y}\right]^{2/3} * 0{,}09486832981 * (0{,}5+0{,}15y)}$$

Gunakan metode x = g(x) dalam soal ini y = g(y)

y	g(y)	ε (%)
1	0.857628	
0.857628	0.925607	-16.6007
0.925607	0.89166	7.34427
0.89166	0.908241	-3.80715
0.908241	0.900054	1.825603
0.900054	0.904075	-0.90964
0.904075	0.902095	0.444775
0.902095	0.903068	-0.2195
0.903068	0.902589	0.107835
0.902589	0.902825	-0.0531
0.902825	0.902709	0.026114
0.902709	0.902766	-0.01285
0.902766	0.902738	0.006322
0.902738	0.902752	-0.00311
0.902752	0.902745	0.00153
0.902745	0.902748	-0.00075
0.902748	0.902747	0.00037
0.902747	0.902748	-0.00018
0.902748	0.902747	8.97E-05
0.902747	0.902747	-4.4E-05

Diperoleh ketinggian air, y = 0,902747 m ≈ 0,9 m

Contoh 2 : Koefisien gesek untuk aliran turbulen dalam sebuah pipa diberikan oleh persamaan berikut :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1{,}14 - 2{,}0 \times \log_{10}\left(\frac{e}{D} + \frac{9{,}35}{R_e.\sqrt{f}}\right)$$

Dengan :

f = Koefisien gesek aliran

R_e = bilangan Reynolds = 3,5 x 10^4

e = kekasaran pipa = 0,003

D = diameter pipa = 0,1 m

Persamaan dapat dituliskan kembali dalam bentuk :

$$f = \left(1{,}14 - 2{,}0 \times \log_{10}\left[\frac{e}{D} + \frac{9{,}35}{R_e.\sqrt{f}}\right]\right)^{-2}$$

Dengan mensubstitusikan nilai – nilai yang diketahui, diperoleh :

$$f = \left(1{,}14 - 2{,}0 \times log_{10}\left[0{,}03 + \frac{0{,}00026714}{\sqrt{f}}\right]\right)^{-2}$$

Gunakan Metoda Iterasi Satu Titik dengan nilai awal f = 1

Iterasi	x	g(x)	ε (%)
1	1	0,057286	
2	0,057286	0,057951	1,146905
3	0,057951	0,057946	-0,00863
4	0,057946	0,057946	6,43E-05

Jadi diperoleh koefisien gesek pipa = 0,057946.

BAB III
SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Dalam bab ini akan dibahas tentang Sistem Persamaan Linear, yang secara umum dapat dituliskan sebagai :

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \ldots + a_{1n}.x_n = c_1 \\ &a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \ldots + a_{2n}.x_n = c_2 \\ &\ldots\ldots \\ &a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + \ldots + a_{nn}.x_n = c_n \end{aligned}\right\} \qquad 3.1$$

Dengan *a* adalah koefisien konstan dan *c* adalah konstan. Persamaan 3.1 dapat dituliskan dalam bentuk notasi matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad 3.2$$

Berbagai cara untuk mencari nilai x_1, x_2 .. x_n akan dijelaskan dalam bab ini.

3.1 Metoda Eliminasi Gauss

Prinsip dalam penyelesaian sistem persamaan linear dengan Metoda Eliminasi Gauss adalah memanipulasi persamaan – persamaan yang ada dengan menghilangkan salah satu variabel dari persamaan – persamaan tersebut, sehingga pada akhirnya hanya tertinggal satu persamaan dengan satu variabel. Akibatnya persamaan yang terakhir ini dapat diselesaikan dan kemudian hasilnya disubstitusikan ke persamaan lainnya untuk memperoleh penyelesaiannya pula.

Misalkan diketahui SPL berikut sebagai berikut :

$$a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \ldots + a_{1n}.x_n = c_1 \qquad 3.3.a$$

$$a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + \ldots + a_{2n}.x_n = c_2 \qquad 3.3.b$$

$$\ldots\ldots.$$

$$a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + a_{n3}.x_3 + \ldots + a_{nn}.x_n = c_n \qquad 3.3.c$$

Dan bila disajikan dalam notasi matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{bmatrix} \qquad 3.4$$

Tahap pertama adalah membuat matriks yang memuat koefisien – koefisien SPL menjadi sebuah matriks segitiga atas (*upper triangular*), langkah pertama adalah dengan mengeliminasi bilangan anu pertama dari x_1 dari persamaan kedua hingga ke-n ($a_{21}, a_{31}, \dots a_{n1}$). Untuk melakukan hal ini maka kalikan persamaan 3.3.a dengan a_{21}/a_{11} untuk memberikan :

$$a_{21}.x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}}.a_{12}.x_2 + \dots + \frac{a_{21}}{a_{11}}.a_{1n}.x_n = \frac{a_{21}}{a_{11}}.c_1 \qquad 3.5$$

Persamaan ini kemudian dikurangkan dari persamaan 3.3.b untuk mendapat :

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}.a_{12}\right).x_2 + \dots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}.a_{1n}\right).x_n = c_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}.c_1 \qquad 3.6$$

Atau

$$a_{22}'.x_2 + \dots + a_{2n}'.x_n = c_2'$$

Prosedur diulang untuk persamaan selanjutnya, misalkan persamaan 3.3.a dikalikan dengan a_{31}/a_{11} dan hasilnya dikurangkan dari persamaan 3.3.b. Dan akhirnya bila prosedur dilaksanakan terhadap seluruh persamaan yang lainnya akan diperoleh bentuk :

$$a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \dots + a_{1n}.x_n = c_1 \qquad 3.7.a$$

$$a'_{22}.x_2 + a'_{23}.x_3 + \dots + a'_{2n}.x_n = c'_2 \qquad 3.7.b$$

$$a'_{32}.x_2 + a'_{33}.x_3 + \dots + a'_{3n}.x_n = c'_3 \qquad 3.7.c$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a'_{n2}.x_2 + a'_{n3}.x_3 + \dots + a'_{nn}.x_n = c'_n \qquad 3.7.d$$

Dalam langkah di atas persamaan 3.3.a disebut persamaan tumpuan (*pivot equation*) dan a_{11} disebut sebagai koefisien tumpuan. Langkah selanjutnya kalikan persamaan 3.7.b dengan a'_{32}/a'_{22} dan kurangkan hasilnya dari persamaan 3.7.c. Lakukan langkah serupa untuk persamaan lainnya, sehingga dapat diperoleh :

$$a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \ldots + a_{1n}.x_n = c_1 \qquad 3.8.a$$

$$a'_{22}.x_2 + a'_{23}.x_3 + \ldots + a'_{2n}.x_n = c'_2 \qquad 3.8.b$$

$$a''_{33}.x_3 + \ldots + a''_{3n}.x_n = c''_3 \qquad 3.8.c$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$a''_{n3}.x_3 + \ldots + a''_{nn}.x_n = c''_n \qquad 3.8.d$$

Jika langkah ini dilanjutkan hingga akhirnya diperoleh suatu bentuk sistem segitiga atas sebagai berikut :

$$a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \ldots + a_{1n}.x_n = c_1 \qquad 3.9.a$$

$$a'_{22}.x_2 + a'_{23}.x_3 + \ldots + a'_{2n}.x_n = c'_2 \qquad 3.9.b$$

$$a''_{33}.x_3 + \ldots + a''_{3n}.x_n = c''_3 \qquad 3.9.c$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$a^{(n-1)}_{nn}.x_n = c^{(n-1)}_n \qquad 3.9.d$$

Dari persamaan 3.9.d akhirnya dapat diperoleh solusi bagi x_n.

$$x_n = \frac{c_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \qquad 3.10$$

Hasil ini kemudian disubstitusikan mudur (*backward substitution*) ke persamaan yang ke (n–1) dan seterusnya, yang dirumuskan :

$$x_i = \frac{c_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)}.x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \qquad 3.11$$

Untuk $i = n-1, n-2, \ldots, 1$

Contoh :

Gunakan Eliminasi Gauss untuk menyelesaikan :

$3.x_1 - 0{,}1.x_2 - 0{,}2.x_3 = 7{,}85$ (i)

$0{,}1.x_1 + 7.x_2 - 0{,}3.x_3 = -19{,}3$ (ii)

$0{,}3.x_1 - 0{,}2.x_2 + 10.x_3 = 71{,}4$ (iii)

Langkah pertama adalah kalikan persamaan (i) dengan (0,1)/3 dan kurangkan hasilnya dari persamaan (ii), sehingga didapat :

$7{,}0033.x_2 - 0{,}293333.x_3 = -19{,}5617$

Selanjutnya kalikan persamaan (i) dengan (0,3)/3 dan kurangkan hasilnya dari persamaan (iii) untuk memberikan hasil :

$$-0{,}19.x_2 + 10{,}02.x_3 = 10{,}6150$$

Setelah langkah kedua ini, maka SPL akan berubah menjadi :

$$\begin{aligned} 3.x_1 - 0{,}1.x_2 - 0{,}2.x_3 &= 7{,}85 && \text{(i.a)} \\ 7{,}0033.x_2 - 0{,}293333.x_3 &= -19{,}5617 && \text{(ii.a)} \\ -0{,}19.x_2 + 10{,}02.x_3 &= 70{,}6150 && \text{(iii.a)} \end{aligned}$$

Langkah berikutnya, kalikan persamaan (ii.a) dengan (–0,19)/7,0033 lalu kurangkan hasilnya dari persaman (iii.a). Dan bila telah dilaksanakan maka SPL akan menjadi suatu bentuk segitiga atas sebagai berikut :

$$\begin{aligned} 3.x_1 - 0{,}1.x_2 - 0{,}2.x_3 &= 7{,}85 && \text{(i.b)} \\ 7{,}0033.x_2 - 0{,}293333.x_3 &= -19{,}5617 && \text{(ii.b)} \\ 10{,}0120.x_3 &= 70{,}0843 && \text{(iii.b)} \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan susbstitusi mundur diperoleh :

$$x_3 = \frac{70{,}0843}{10{,}012} = 7{,}00003$$

$$x_2 = \frac{-19{,}5617 + (0{,}293333 \times 7{,}00003)}{7{,}0033} = -2{,}5$$

$$x_1 = \frac{7{,}85 + (0{,}2 \times 7{,}00003) + (0{,}1 \times -2{,}5)}{3} = 3$$

Untuk menguji hasil ini, maka substitusikan x_1, x_2 dan x_3 ke persamaan – persamaan di atas :

$$3(3) - 0{,}1(-2{,}5) - 0{,}2(7{,}00003) = 7{,}84999 \approx 7{,}85$$

$$0{,}1(3) - 0{,}7(-2{,}5) - 0{,}3(7{,}00003) = -19{,}3$$

$$0{,}3(3) - 0{,}2(-2{,}5) - 10(7{,}00003) = 71{,}4003 \approx 71{,}4$$

Pivoting

Jika elemen pivot adalah sama dengan nol, maka akan muncul pembagian dengan nol, untuk menghindari hal ini maka harus dilakukan proses pivoting, yaitu dengan mempertukarkan baris – baris yang ada dalam SPL, sehingga elemen pivot adalah elemen terbesar.

Contoh :

Selesaikan SPL berikut ini dengan eliminasi Gauss :

$0{,}0003.x_1 + 3{,}0000.x_2 = 2{,}0001$

$1{,}0000.x_1 + 1{,}0000.x_2 = 1{,}0000$

Perhatikan bahwa elemen pivotnya adalah a_{11}=0,0003 yang sangat dekat dengan nol, maka harus dilakukan pivoting dengan mempertukarkan barisnya. (perhatikan bahwa penyelesaian eksak x_1 = 1/3 dan x_2 = 2/3).

Tanpa pivoting :

Normalkan persamaan pertama :

$x_1 + 10000.x_2 = 6667$

Yang dapat dipakai untuk menghilangkan x_1 dari persamaan kedua.

$-9999.x_2 = -6666 \quad \rightarrow \quad x_2 = 2/3$

Substitusikan ke persamaan satu untuk memperoleh :

$$x_1 = \frac{2{,}0001 - 3(2/3)}{0{,}0003}$$

Hasil x_1 sangat tergantung pada pembulatan yang dilakukan :

Angka benar	x_2	x_1	Relatif Error x_1
3	0,667	-3,000	1000
4	0,6667	0,0000	100
5	0,66667	0,30000	10
6	0,666667	0,330000	1
7	0,6666667	0,3330000	0,1

Dengan pivoting :

$1{,}0000.x_1 + 1{,}0000.x_2 = 1{,}0000$

$0{,}0003.x_1 + 3{,}0000.x_2 = 2{,}0001$

Dengan penormalan dan eliminasi, diperoleh :

$$x_1 = \frac{1 - (2/3)}{1}$$

Ternyata dengan melakukan *pivoting*, banyaknya angka benar tidak sensitif dalam perhitungan seperti contoh sebelumnya.

Angka benar	x_2	x_1	Relatif Error x_1
3	0,667	0,333	0,1
4	0,6667	0,3333	0,01
5	0,66667	0,33333	0,001
6	0,666667	0,333333	0,0001
7	0,6666667	0,3333333	0,00001

Jadi dengan melakukan *pivot*, cukup memberikan keuntungan dalam perhitungan.

3.2 Metoda Eliminasi Gauss-Jordan

Metoda Eliminasi Gauss-Jordan adalah merupakan pengembangan dari Metoda Eliminasi Gauss. Dalam metoda Eliminasi Gauss-Jordan, matriks koefisien dirubah hingga menjadi matriks identitas.

Contoh :

Selesaikan SPL berikut dengan Eliminasi Gauss-Jordan :

$$3x + y - z = 5$$

$$4x + 7y - 3z = 20$$

$$2x - 2y + 5z = 10$$

SPL di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Bagilah baris petama dengan elemen pivot yaitu 3, sehingga :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}3333 & -0{,}3333 \\ 4 & 7 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}6666 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Kalikan persamaan pertama dengan elemen pertama dari persamaan kedua, lalu kurangkan hasilnya dari persamaan kedua, lakukan hal serupa untuk persamaan ketiga, sehingga :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}3333 & -0{,}3333 \\ 0 & 5{,}6668 & -1{,}6668 \\ 0 & -2{,}6666 & 5{,}6666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}6666 \\ 13{,}3336 \\ 6{,}6668 \end{bmatrix}$$

Baris kedua dari persamaan tersebut dibagi dengan elemen pivot yaitu 5,6668, sehingga diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,3333 & -0,3333 \\ 0 & 1 & -0,2941 \\ 0 & -2,6666 & 5,6666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6666 \\ 2,3529 \\ 6,6668 \end{bmatrix}$$

Kalikan persamaan kedua dengan elemen kedua dari persamaan pertama (0,3333), kemudian kurangkan dari persamaan pertama. Lakukan hal serupa untuk persamaan ketiga, untuk mendapatkan :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,2353 \\ 0 & 1 & -0,2941 \\ 0 & 0 & 4,8824 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8824 \\ 2,3529 \\ 12,941 \end{bmatrix}$$

Persamaan ketiga dibagi dengan elemen pivot, yaitu 4,8824 sehingga persamaan menjadi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,2353 \\ 0 & 1 & -0,2941 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8824 \\ 2,3529 \\ 2,6505 \end{bmatrix}$$

Kalikan persamaan ketiga dengan elemen ketiga dari persamaan pertama, hasilnya kemudian dikurangkan dari persamaan pertama. Hal serupa dilakukan terhadap persamaan kedua, sehingga SPL menjadi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5061 \\ 3,1324 \\ 2,6505 \end{bmatrix}$$

Jadi penyelesaian SPL tersebut adalah :

x = 1,5061 y = 3,1324 z = 2,6505

3.3 Metoda Matriks Invers

Jika [A] adalah seuatu matriks bujursangkar dengan ukuran m x m, maka akan terdapat matriks invers $[A]^{-1}$, sehingga diperoleh hubungan :

$$[A].[A]^{-1} = [I] \qquad 3.12$$

Maka jika terdapat suatu SPL dalam notasi matriks :

$$[A].\{X\} = \{C\}$$

Jika ruas kiri dan kanan kita *premultiply* dengan $[A]^{-1}$, maka :

$$[A]^{-1}.[A].\{X\} = [A]^{-1}.\{C\}$$
$$[I].\{X\} = [A]^{-1}.\{C\}$$
$$\{X\} = [A]^{-1}.\{C\} \qquad 3.13$$

Banyak cara dapat digunakan untuk mencari matriks invers, salah satunya adalah dengan menggunakan Metoda Eliminasi Gauss-Jordan. Untuk melakukan hal ini, matriks koefisien dilengkapi dengan suatu matriks identitas. Kemudian terpakan Metoda Gauss-Jordan untuk mengubah matriks koefisien menjadi matriks identitas. Jika langkah ini telah selesai, maka ruas kanan matriks itu akan merupakan matriks invers. Atau secara ilustrasi, proses tersebut adalah sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

[A] [I]

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & a_{13}^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & a_{23}^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & a_{31}^{-1} & a_{32}^{-1} & a_{33}^{-1} \end{array}\right]$$

[I] $[A]^{-1}$

Contoh :

Ulangi contoh soal pada halaman 51, namun dengan menggunakan metoda matriks invers.

Langkah pertama yang dilakukan adalah melengkapi matriks koefisien dengan matriks identitas sehingga menjadi matriks lengkap sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Normalkan persamaan pertama, kemudian gunakan elemen pertamanya untuk menghilangkan x_1 dari baris yang lainnya :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -0{,}0333333 & -0{,}0666667 & 0{,}333333 & 0 & 0 \\ 0 & 7{,}00333 & -0{,}293333 & -0{,}0333333 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}19 & 10{,}02 & -0{,}0999999 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Gunakan a_{22} dari persamaan kedua untuk menghilangkan x_2 dari persamaan pertama dan ketiga :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -0{,}068057 & 0{,}333175 & 0{,}004739329 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}0417061 & -0{,}00473933 & 0{,}142180 & 0 \\ 0 & 0 & 10{,}0121 & -0{,}10090 & 0{,}0270142 & 1 \end{array}\right]$$

Dan gunakan elemen a_{33} untuk menghilangkan x_3 dari persamaan pertama dan kedua :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0{,}332489 & 0{,}00492297 & 0{,}00679813 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}0051644 & 0{,}142293 & 0{,}00418346 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}0100779 & 0{,}00269816 & 0{,}0998801 \end{array}\right]$$

Dengan demikian invers-nya adalah :

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}332489 & 0{,}00492297 & 0{,}00679813 \\ -0{,}0051644 & 0{,}142293 & 0{,}00418346 \\ -0{,}0100779 & 0{,}00269816 & 0{,}0998801 \end{bmatrix}$$

Solusi bagi x_1*,* x_2 *dan* x_3 diperoleh dari perkalian matriks invers dengan ruas kanan persamaan :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}332489 & 0{,}00492297 & 0{,}00679813 \\ -0{,}0051644 & 0{,}142293 & 0{,}00418346 \\ -0{,}0100779 & 0{,}00269816 & 0{,}0998801 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7{,}85 \\ -19{,}30 \\ 71{,}4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}00041181 \\ 2{,}48809640 \\ 7{,}00025314 \end{bmatrix}$$

3.4 Iterasi Jacobi

Penggunaan metoda eliminasi untuk menyelesaikan suatu SPL terkadang menjumpai masalah, seperti adanya pembulatan (contoh hal.53). Metoda ini juga kurang efisien untuk menyelesaikan SPL – SPL berukuran besar. Untuk itulah maka dikembangkan metoda iterasi. Dari beberapa metoda iterasi yang ada, Metoda Iterasi Jacobi adalah salah satu metoda iterasi untuk menyelesaikan SPL. Misalkan diberikan *n* buah persamaan, yang dalam notasi matriks adalah :

[A]{X} = {C}

Jika elemen – elemen diagonal semuanya tidak nol, persamaan pertama dapat diselesaikan untuk x_1, yang kedua untuk x_2 dan seterusnya hingga dihasilkan :

$$x_1 = \frac{c_1 - a_{11}.x_2 - a_{13}.x_3 - ... - a_{1n}.x_n}{a_{11}} \qquad 3.14.a$$

$$x_2 = \frac{c_2 - a_{21}.x_1 - a_{23}.x_3 - ... - a_{2n}.x_n}{a_{22}} \qquad 3.14.b$$

$$x_3 = \frac{c_3 - a_{31}.x_1 - a_{32}.x_2 - ... - a_{3n}.x_n}{a_{33}} \qquad 3.14.c$$

…………….

$$x_n = \frac{c_n - a_{n1}.x_1 - a_{n2}.x_2 - ... - a_{n,n-1}.x_{n-1}}{a_{nn}} \qquad 3.14.d$$

Proses penyelesaiannya dapat dimulai dengan nilai awal bagi x_1, x_2,hingga x_n sama dengan nol. Nilai-nilai awal nol ini dapat disubstitusikan ke 3.14.a, b, c dan d untuk memperoleh nilai baru $x_1^{/} = c_1^{/}a_{11}$. $x_2^{/} = c_2/a_{22}$, $x_3^{/} = c_3/a_{33}, \dots$, $x_n^{/} = c_n^{/}a_{nn}$ .Nilai $x_1^{/}$, $x_2^{/}$, $x_3^{/}$, …, $x_n^{/}$ kemudian disustitusikan lagi ke persamaan 3.14.a,b,c,d untuk memperoleh :

$$x_1^{//} = \frac{c_1 - a_{11}.x_2^{/} - a_{13}.x_3^{/} - ... - a_{1n}.x_n^{/}}{a_{11}} \qquad 3.15.a$$

$$x_2^{//} = \frac{c_2 - a_{21}.x_1^{/} - a_{23}.x_3^{/} - ... - a_{2n}.x_n^{/}}{a_{22}} \qquad 3.15.b$$

$$x_3^{//} = \frac{c_3 - a_{31}.x_1^{/} - a_{32}.x_2^{/} - ... - a_{3n}.x_n^{/}}{a_{33}} \qquad 3.15.c$$

……

$$x_n^{//} = \frac{c_n - a_{n1}.x_1^{/} - a_{n2}.x_2^{/} - ... - a_{n,n-1}.x_{n-1}^{/}}{a_{nn}} \qquad 3.15.d$$

Prosedur tersebut diulangi terus hingga terjadi kekonvergenan, kriteria konvergen terpenuhi, jika :

$$\left|\varepsilon_{a,i}\right| = \left|\frac{x_i^{\,j} - x_i^{\,j-1}}{x_i^{\,j}}\right|.100\% < \varepsilon_s \qquad 3.16$$

Contoh :

Selesaikan SPL berikut dengan metoda Iterasi Jacobi :

$3.x_1 + x_2 - x_3 = 5$

$4.x_1 + 7.x_2 - 3.x_3 = 20$

$2.x_1 - 2.x_2 + 5.x_3 = 10$

SPL tersebut dapat dituliskan dalam bentuk :

$$x_1 = \frac{5 - x_2 + x_3}{3}$$

$$x_2 = \frac{20 - 4.x_1 + 3.x_3}{7}$$

$$x_3 = \frac{10 - 2.x_1 + 2.x_2}{5}$$

Substitusikan nilai awal $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ untuk menghitung $x_1^{/}, x_2^{/}, x_3^{/}$:

$$x_1^{/} = \frac{5}{3} = 1{,}66667 \qquad x_2^{/} = \frac{20}{7} = 2{,}85714 \qquad x_3^{/} = \frac{10}{5} = 2$$

Substitusikan lagi $x_1^{/}$, $x_2^{/}$, $x_3^{/}$ ke SPL tersebut untuk memperoleh :

$$x_1^{//} = \frac{5 - 2{,}85714 + 2}{3} = 1{,}38095$$

$$\varepsilon_a = \frac{1{,}38095 - 1{,}66667}{1{,}38095} \times 100\% = 20{,}69\%$$

$$x_2^{//} = \frac{20 - (4 \times 1{,}66667) + (3 \times 2)}{7} = 2{,}76190$$

$$\varepsilon_a = \frac{2{,}76190 - 2{,}85714}{2{,}76190} \times 100\% = 3{,}45\%$$

$$x_3^{//} = \frac{10 - (2 \times 1{,}66667) + (2 \times 2{,}85714)}{5} = 2{,}47619$$

$$\varepsilon_a = \frac{2{,}47619 - 2}{2{,}47619} \times 100\% = 19{,}23\%$$

Lanjutkan prosedur di atas hingga terjadi kekonvergenan, hasil iterasi ditabelkan sebagai berikut :

Iterasi	x_1	x_2	x_3	$\varepsilon_{,x1}$(%)	$\varepsilon_{,x2}$(%)	$\varepsilon_{,x3}$(%)
1	0	0	0			
2	1,66667	2,85714	2,00000	100	100	100
3	1,38095	2,76190	2,47619	20,6897	3,4483	19,2308
4	1,57143	3,12925	2,55238	12,1212	11,7391	2,9851
5	1,47438	3,05306	2,62313	6,5826	2,4955	2,6971
6	1,52336	3,13884	2,63147	3,2152	2,7328	0,3171
7	1,49754	3,11443	2,64619	1,7236	0,7838	0,5563
8	1,51059	3,13549	2,64675	0,8635	0,6716	0,0211
9	1,50376	3,12827	2,64996	0,4544	0,2306	0,1210
10	1,50723	3,13355	2,64981	0,2304	0,1684	0,0058
11	1,50542	3,13150	2,65053	0,1202	0,0655	0,0272
12	1,50634	3,13284	2,65043	0,0613	0,0429	0,0036
13	1,50586	3,13228	2,65060	0,0319	0,0182	0,0063
14	1,50611	3,13262	2,65057	0,0163	0,0111	0,0013
15	1,50598	3,13247	2,65061	0,0085	0,0050	0,0015
16	1,50605	3,13256	2,65059	0,0043	0,0029	0,0004
17	1,50601	3,13251	2,65060	0,0022	0,0013	0,0004
18	1,50603	3,13254	2,65060	0,0012	0,0008	0,0001
19	1,50602	3,13253	2,65060	0,0006	0,0004	0,0001
20	1,50603	3,13253	2,65060	0,0003	0,0002	0,0000
21	1,50602	3,13253	2,65060	0,0002	0,0001	0,0000

Sehingga diperoleh bahwa x_1 = 1,50602, x_2 = 3,13253, x_3 = 2,65060

3.5 Iterasi Gauss-Seidel

Selain Metoda Iterasi Jacobi, terdapat cara lain iterasi bagi SPL yaitu dengan metoda Iterasi Gauss – Seidel. Seperti halnya iterasi Jacobi, maka SPL dapat disusun dalam bentuk :

$$x_1 = \frac{c_1 - a_{11}.x_2 - a_{13}.x_3 - ... - a_{1n}.x_n}{a_{11}} \quad 3.17.a$$

$$x_2 = \frac{c_2 - a_{21}.x_1 - a_{23}.x_3 - ... - a_{2n}.x_n}{a_{22}} \quad 3.17.b$$

$$x_3 = \frac{c_3 - a_{31}.x_1 - a_{32}.x_2 - ... - a_{3n}.x_n}{a_{33}} \quad 3.17.c$$

……………

$$x_n = \frac{c_n - a_{n1}.x_1 - a_{n2}.x_2 - ... - a_{n,n-1}.x_{n-1}}{a_{nn}} \quad 3.17.d$$

Proses penyelesaiannya dapat dimulai dengan nilai awal bagi x_1, x_2,hingga x_n sama dengan nol. Nilai-nilai awal nol ini dapat disubstitusikan ke 3.14.a, b, c dan d untuk memperoleh nilai baru $x_1^{/} = c_1/a_{11}$. Nilai baru x_1 kita substitusikan ke persamaan 3.14.b, bersama nilai awal lain ($x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0$) untuk menghitung nilai baru x_2. Demikian seterusnya hingga x_n. Prosedur diulangi lagi dari awal dengan nilai – nilai baru yang didapat. Kekonvergenan dapat diperiksa dengan :

$$\left|\varepsilon_{a,i}\right| = \left|\frac{x_i^{\,j} - x_i^{\,j-1}}{x_i^{\,j}}\right| .100\% < \varepsilon_s \qquad 3.18$$

untuk semua nilai i, di mana j adalah hasil iterasi sekarang dan $j–1$ adalah hasil iterasi sebelumnya.

Contoh :

Selesaikan SPL dalam contoh sebelumnya dengan Metoda Iterasi Gauss-Seidel :

$$3.x_1 + x_2 - x_3 = 5$$
$$4.x_1 + 7.x_2 - 3.x_3 = 20$$
$$2.x_1 - 2.x_2 + 5.x_3 = 10$$

Dengan nilai awal $x_2 = x_3 = 0$, hitung $x_1^{/}$:

$$x_1^{/} = \frac{5 - 0 + 0}{3} = 1{,}66667$$

Selanjutnya dengan nilai $x_1^{/} = 1{,}66667$ dan $x_3 = 0$, hitung $x_2^{/}$:

$$x_2^{/} = \frac{20 - (4 \times 1{,}66667) + (3 \times 0)}{7} = 1{,}90476$$

Dengan $x_1^{/} = 1{,}66667$ dan $x_2^{/} = 1{,}90476$, hitunglah $x_3^{/}$:

$$x_3^{/} = \frac{10 - (2 \times 1{,}66667) + (2 \times 1{,}90476)}{5} = 2{,}09524$$

Selanjutnya nilai $x_2^{/}$ dan $x_3^{/}$ dipakai untuk menghitung nilai $x_1^{//}$. Proses ini diulangi hingga mencapai kekonvergenan yang diinginkan, hasil hitungan ditabelkan sebagai berikut :

Iterasi	X_1	x_2	x_3	$\varepsilon_{,x1}$(%)	$\varepsilon_{,x2}$(%)	$\varepsilon_{,x3}$(%)
1	0,00000	0,00000	0,00000			
2	1,66667	1,90476	2,09524	100	100	100
3	1,73016	2,76644	2,41451	3,66972	31,14754	13,22314
4	1,54936	3,00659	2,58289	11,66943	7,98736	6,51902
5	1,52543	3,09242	2,62679	1,56824	2,77558	1,67132
6	1,51146	3,11922	2,64311	0,92473	0,85925	0,61713
7	1,50796	3,12821	2,64810	0,23189	0,28735	0,18860
8	1,50663	3,13111	2,64979	0,08838	0,09266	0,06390
9	1,50623	3,13207	2,65034	0,02674	0,03051	0,02050
10	1,50609	3,13238	2,65052	0,00913	0,00994	0,00677
11	1,50605	3,13248	2,65057	0,00292	0,00326	0,00220
12	1,50603	3,13251	2,65059	0,00097	0,00106	0,00072
13	1,50603	3,13252	2,65060	0,00031	0,00035	0,00024
14	1,50602	3,13253	2,65060	0,00010	0,00011	0,00008

Dari hasil di atas, tampaknya Metode Iterasi Gauss-Seidel lebih cepat mencapai kekonvergenan daripada Metoda Iterasi Jacobi.

3.6 Dekomposisi LU

Suatu SPL disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$[A]\{X\} = \{C\} \qquad 3.19$$

yang dapat disusun menjadi bentuk :

$$[A]\{X\} - \{C\} = 0 \qquad 3.20$$

Jika persamaan 3.19 dinyatakan ulang sebagi suatu matriks segituga atas, dengan angka satu pada diagonal utama :

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \qquad 3.21$$

Persamaan 3.21 mirip dengan eliminasi maju Gauss, yang dalam notasi matriks dapat dinyatakan dan disusun ulang sebagai :

$$[U]\{X\} - \{D\} = 0 \qquad 3.22$$

Jika terdapat matriks segitiga bawah :

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \qquad 3.23$$

yang bila persamaan 3.22 di-premultiply dengannya akan menghasilkan persamaan 3.20. Yaitu :

$$[L]\ \{ [U]\{X\} - \{D\} \} = [A]\{X\} - \{C\} \qquad 3.24$$

Jika persamaan 3.24 berlaku maka dari aturan perkalian matriks berlaku :

$$[L][U] = [A] \qquad 3.25.a$$

dan $[L]\{D\} = \{C\}$ 3.25.b

Persamaan 3.25.a dikenal sebagai dekomposisi LU dari [A]. Secara skematis, penyelesaian suatu SPL dengan menggunakan dekomposisi LU adalah sebagai berikut :

$$[A]\{X\} = \{C\}$$

dekomposisi: $[U] \quad [L]$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{[L]\{D\} = \{C\}}_{\{D\}}$$

substitusi maju

$$\downarrow$$

$$\underbrace{[U]\ \{X\}}_{\{X\}} = \{D\}$$

substitusi mudur

Gambar 3.1 Langkah – langkah Dekomposisi LU

3.6.1 Dekomposisi LU Metoda Eliminasi Gauss

Metoda Eliminasi Gauss dapat digunakan untuk mendekomposisi matriks [A] menjadi [L] dan [U]. Perhatikan bahwa hasil eliminasi maju dari matriks koefisien adalah berupa matriks segitiga atas [U].

$$[U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}{}^{/} & a_{23}{}^{/} \\ 0 & 0 & a_{33}{}^{//} \end{bmatrix} \qquad 3.26$$

Secara tidak nyata, sebenarnya matriks [L] juga dihasilkan dari langkah tersebut, misalkan ada SPL :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \qquad 3.27$$

Langkah pertama dalam eliminasi Gauss adalah mengalikan baris pertama dengan faktornya :

$$f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

dan mengurangkan hasilnya dari baris kedua untuk menghilangkan a21. Demikian pula baris 1 dikalikan dengan

$$f_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

dan hasilnya dikurangkan dari baris ketiga untuk mengeliminasi a_{31}. Langkah akhir untuk sistem 3 x 3 adalah mengalikan baris kedua yang telah dimodifikasi dengan :

$$f_{32} = \frac{a_{32}{}^{/}}{a_{22}{}^{/}}$$

dan mengurangkan hasilnya dari baris ketiga untuk mengeliminasi a_{32}.

Nilai – nilai f_{21}, f_{31}, f_{32} sebenarnya merupakan elemen – elemen dari [L].

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32}{}^{/} & 1 \end{bmatrix} \qquad 3.28$$

Jika matriks [L] ini dikalikan dengan matriks [U] akan diperoleh matriks [A].

Contoh :

Lakukan dekomposisi LU Metoda Elminasi Gauss, untuk matriks koefisien [A] berikut ini :

$$3.x_1 - 0{,}1.x_2 - 0{,}2.x_3 = 7{,}85$$
$$0{,}1.x_1 + 7.x_2 - 0{,}3.x_3 = -19{,}3$$
$$0{,}3.x_1 - 0{,}2.x_2 + 10.x_3 = 71{,}4$$

Dengan melakukan proses eliminasi maju diperoleh matriks [U] sebagai berikut :

$$[U] = \begin{bmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & 7{,}00333 & -0{,}293333 \\ 0 & 0 & 10{,}0120 \end{bmatrix}$$

Faktor – faktor yang dipakai untuk memperoleh matriks segitiga atas disusun menjadi matriks segitiga bawah :

$f_{21} = \frac{0{,}1}{3}$ = 0,0333333 $\qquad$ $f_{31} = \frac{0{,}3}{3}$ = 0,1

Dan $\quad f_{32} = \frac{-0{,}19}{7{,}00333}$ = –0,02713

Sehingga matriks segitiga bawah [L] adalah :

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}0333333 & 1 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}02713 & 1 \end{bmatrix}$$

Dan dekomposisi LU dari matriks [A] adalah :

$$[A] = [L][U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}0333333 & 1 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}02713 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & 7{,}00333 & -0{,}293333 \\ 0 & 0 & 10{,}0120 \end{bmatrix}$$

3.6.2 Dekomposisi LU Metoda Crout

Untuk SPL dengan n = 4, maka persamaan 3.25.a dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \qquad 3.29$$

Metoda Crout diturunkan dengan mengunakan perkalian matriks untuk menghitung ruas kiri persamaan 3.29 lalu menyamakannya dengan ruas kanan. Langkah pertama adalah kalikan baris pertama [L] dengan kolom pertama [U]. Langkah ini memberikan :

$l_{11}=a_{11} \qquad l_{21}=a_{21} \qquad l_{31}=a_{31} \qquad l_{41}=a_{41}$

Secara umum dapat dituliskan bahwa :

$l_{i1} = a_{i1}$ $\qquad$ untuk i = 1,2,…,n $\qquad$ 3.30.a

Selanjutnya baris pertama [L] dikalikan dengan kolom – kolom dari [U] untuk memberikan :

$l_{11}=a_{11} \qquad l_{11}.u_{12}=a_{12} \qquad l_{11}.u_{13}=a_{13} \qquad l_{11}.u_{14}=a_{14}$

Hubungan pertama sudah jelas, dan berikutnya adalah :

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} \qquad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} \qquad u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}}$$

Atau secara umum dinyatakan :

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \qquad \text{untuk } j = 2,3,\ldots.,n \qquad 3.30.b$$

Selanjutnya baris kedua sampai keempat dari [L] dikalikan dengan kolom kedua [U] sehingga menghasilkan :

$$l_{21}.u_{12} + l_{22} = a_{22} \qquad l_{31}.u_{12} + l_{32} = a_{32} \qquad l_{41}.u_{12} + l_{42} = a_{42}$$

Masing – masing dapat dipecahkan untuk l_{22}, l_{32} dan l_{42} :

$$l_{i2} = a_{i2} - l_{i1}.u_{12} \qquad \text{untuk } i = 2,3,\ldots,n \qquad 3.30.c$$

Kalikan baris kedua [L] dengan kolom – kolom ketiga dan keempat :

$$l_{21}.u_{13} + l_{22}.u_{23} = a_{23} \qquad l_{21}.u_{14} + l_{22}.u_{24} = a_{24}$$

Yang dapat dipecahkan untuk u_{23} dan u_{24} :

$$u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}.u_{13}}{l_{22}} \qquad u_{24} = \frac{a_{24} - l_{21}.u_{14}}{l_{22}}$$

Atau secara umum :

$$u_{2j} = \frac{a_{2j} - l_{21}.u_{1j}}{l_{22}} \qquad \text{untuk } j = 3,4,\ \ldots,\ n \qquad 3.30.d$$

Dari hasil hasil di atas maka dapat diberikan rumusan umum Metoda Dekomposisi Cara Crout :

$$l_{i1} = a_{i1} \qquad \text{untuk } i = 1,2,3,\ \ldots,\ n$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \qquad \text{untuk } j = 2,3,\ \ldots,\ n$$

Untuk $j = 2,3,\ldots\ldots., n-1$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}.u_{kj} \qquad \text{untuk } i = j, j+1,\ \ldots.,\ n$$

$$u_{jk} = \frac{a_{jk} - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ji}.u_{ik}}{l_{jj}} \qquad \text{untuk } k = j+1, j+2,\ \ldots,\ n$$

Dan

$$l_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}.u_{kn}$$

Contoh :

Lakukan dekomposisi LU dari SPL ini, dengan metoda Crout

$2.x_1 - 5.x_2 + \quad x_3 = 12$

$-x_1 + 3.x_2 - \quad x_3 = -8$

$3.x_1 - 4.x_2 + 2.x_3 = 16$

Dengan memakai rumusan yang ada

$l_{11} = 2 \qquad l_{21} = -1 \qquad l_{31} = 3$

Baris pertama dari [U] :

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{-5}{2} = -2{,}5$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Kolom kedua [L] :

$l_{22} = a_{22} - l_{21}.u_{12} = 3 - (-1)(-2{,}5) = 0{,}5$

$l_{32} = a_{32} - l_{31}.u_{12} = -4 - (3)(-2{,}5) = 3{,}5$

Elemen terakhir dari [U] :

$$u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}.u_{13}}{l_{22}} = \frac{-1-(-1)(0{,}5)}{0{,}5} = -1$$

Dan elemen terakhir dari [L] :

$l_{33} = a_{33} - l_{31}.u_{13} - l_{32}.u_{23} = 2 - 3(0{,}5) - 3{,}5(-1) = 4$

Jadi dekomposisi LU adalah :

$$[L] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0{,}5 & 0 \\ 3 & 3{,}5 & 4 \end{bmatrix} \qquad [U] = \begin{bmatrix} 1 & -2{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dan bila hasil dekomposisi ini digunakan untuk menyelesaikan SPL tersebut, maka langkah selanjutnya adalah sebagai berikut : (sesuai gambar 3.1)

[L]{D} = {C}

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0{,}5 & 0 \\ 3 & 3{,}5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

dengan melakukan substitusi maju :

$$d_1 = \frac{12}{2} = 6$$

$$d_2 = \frac{c_2 - l_{21}.d_1}{l_{22}} = \frac{-8-(-1\times 6)}{0,5} = -4$$

$$d_3 = \frac{c_3 - l_{31}.d_1 - l_{32}.d_2}{l_{33}} = \frac{16-3(6)-3,5(-4)}{4} = 3$$

Kemudian [U]{X} = {D}

$$\begin{bmatrix} 1 & -2,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi mundur akan diperoleh :

$x_3 = d_3 = 3$

$x_2 = d_2 - u_{23}.x_3 = -4 - (-1)3 = -1$

$x_1 = d_1 - u_{12}.x_2 - u_{13}.x_3 = 6 - (-2,5)(-1) - 0,5(3) = 2$

3.7 Dekomposisi Cholesky

Dalam dekomposisi Cholesky, matriks koefisien [A] dapat didekomposisi menjadi bentuk :

$$[A] = [L][L]^T \qquad 3.31$$

Suku – suku dalam persamaan 3.31 dapat diperoleh dengan cara yang sama seperti cara Crout. Hasilnya dapat dinyatakan dalam hubungan :

$$l_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}.l_{kj}}{l_{ii}} \qquad \text{untuk } i = 1,2, \ldots, k-1 \qquad 3.32$$

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^{\,2}} \qquad 3.33$$

Contoh :

Gunakan dekomposisi Cholesky untuk matriks koefisien berikut ini :

$$[A] = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}$$

Untuk baris ke satu, dengan menggunakan 3.33 :

$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{6} = 2,4495$

Untuk baris kedua, dari persamaan 3.32 :

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{15}{2,4495} = 6,1237$$

Dari 3.33 memberikan :

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{55 - (6,1237)^2} = 4,1833$$

Untuk baris ketiga, persamaan 3.32 (k = 3) memberikan :

i = 1 $\quad l_{31} = \dfrac{a_{31}}{l_{11}} = \dfrac{55}{2,4495} = 22,454$

i = 2 $\quad l_{32} = \dfrac{a_{32} - l_{21}.l_{31}}{l_{22}} = \dfrac{225 - 6,1237(22,454)}{4,1833} = 20,916$

Dan elemen terakhir [L] adalah :

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{979 - (22,454)^2 - (20,916)^2} = 6,1106$$

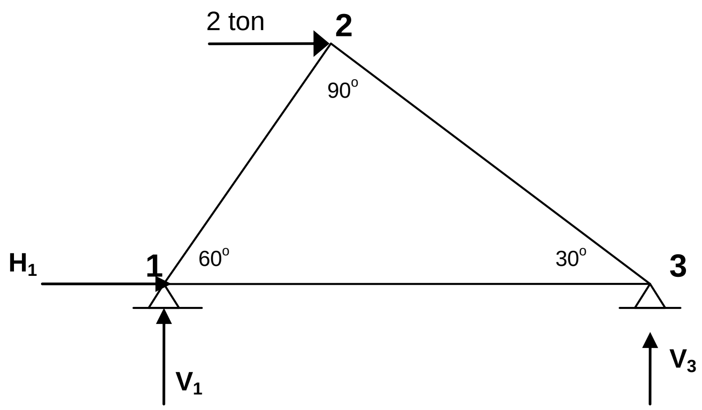
Sehingga dekomposisi LU metoda Cholesky menghasilkan :

$$[A]= \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,4495 & 0 & 0 \\ 6,1237 & 4,1833 & 0 \\ 22,454 & 20,916 & 6,1106 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,4495 & 6,1237 & 22,454 \\ 0 & 4,1833 & 20,916 \\ 0 & 0 & 6,1106 \end{bmatrix}$$

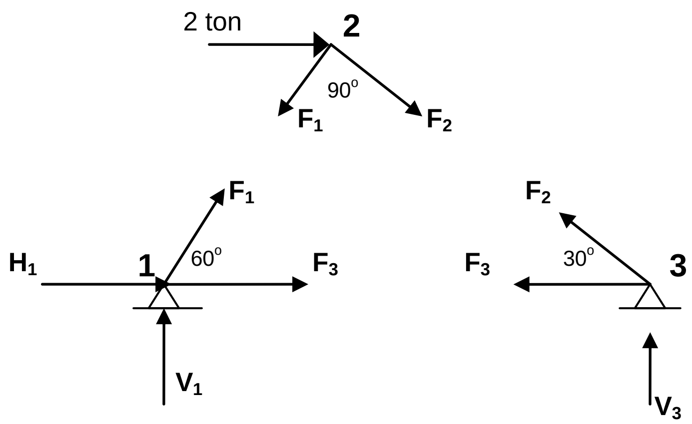
3.8 Sistem Persamaan Linear Dalam Bidang Teknik Sipil

3.8.1 Bidang Rekayasa Struktur

Contoh 1 : Struktur rangka bidang dalam gambar berikut, dibebani gaya sebesar 2 ton. Hitunglah gaya dalam batang serta reaksi perletakan.



Dengan cara keseimbangan gaya pada titik kumpul, gaya – gaya yang bekerja pada tiap titik kumpul dapat digambarkan dalam gambar berikut ini :



Gaya batang tarik bertanda positif, sedangkan batang tekan bertanda negatif.

Nodal 1 :

$$\sum F_h = F_1.\cos(60) + F_3 + H_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_V = F_1.\sin(60) + V_1 = 0 \qquad (2)$$

Nodal 2 :

$$\sum F_h = F_2.\sin(60) - F_1.\sin(30) + 2 = 0 \qquad (3)$$

$$\sum F_V = - F_1.\cos(30) - F_2.\cos(60) = 0 \qquad (4)$$

Nodal 3 :

$$\sum F_h = -F_3 - F_2.\cos(30) = 0 \qquad (5)$$

$$\sum F_V = F_2.\sin(30) + V_3 = 0 \qquad (6)$$

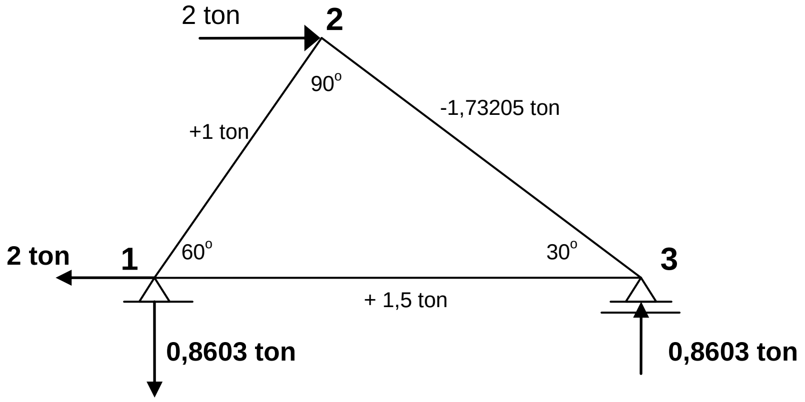
Jika disusun dalam bentuk matriks, persamaan (1) hingga (6) adalah :

$$\begin{bmatrix} cos(60) & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ sin(60) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -sin(30) & sin(60) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -cos(30) & -cos(60) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -cos(30) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sin(30) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ H_1 \\ V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

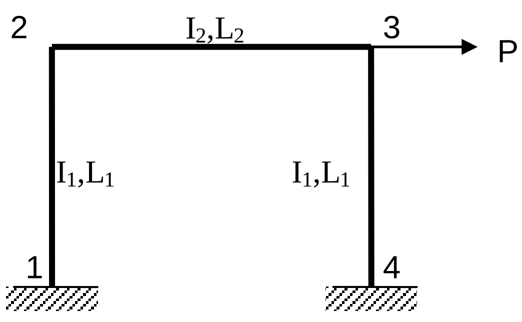
$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5\sqrt{3} & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5\sqrt{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ H_1 \\ V_1 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Setelah dilakukan eliminasi Gauss-Jordan, diperoleh hasil :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ H_2 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}73205 \\ 1{,}5 \\ -2 \\ -0{,}86603 \\ 0{,}86603 \end{bmatrix}$$



Contoh 2 : Dari analisis struktur portal seperti tergambar, diperoleh hubungan matriks kekakuan dengan derajat kebebasan sebagai [K]{X}={B}



Bila :

P = 120 kN

L_1 = 5 m L_2 = 7 m

I_1 = 0,083(0,3)^4

A_1 = 0,3 x 0,3 = 0,09 m^2

I_2 = 0,083(0,4)(0,6)^3

A_2 = 0,4 x 0,6 = 0,24 m^2

E = 2,1.10^5 MPa

Ditanya : selesaikan persamaan linear simultan [K]{X} = {B} dengan cara CHOLESKY, jika diketahui :

$$[K]=\begin{bmatrix} \frac{12EI_1}{L_1^3}+\frac{EA_2}{L_2} & 0 & \frac{6EI_1}{L_1^2} & -\frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_1}{L_1}+\frac{12EI_2}{L_2^3} & \frac{6EI_2}{L_2^2} & 0 & -\frac{12EI_2}{L_2^3} & \frac{6EI_2}{L_2^2} \\ \frac{6EI_1}{L_1^2} & \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{4EI_1}{L_1}+\frac{4EI_2}{L_2} & 0 & -\frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{2EI_2}{L_2} \\ -\frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{L_2}+\frac{12EI_1}{L_1^3} & 0 & -\frac{6EI_1}{L_1^2} \\ 0 & -\frac{12EI_2}{L_2^3} & -\frac{6EI_2}{L_2^2} & 0 & \frac{12EI_2}{L_2^3}+\frac{EA_1}{L_1} & -\frac{6EI_2}{L_2^2} \\ 0 & \frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{2EI_2}{L} & -\frac{6EI_1}{L_1^2} & -\frac{6EI_2}{L_2^2} & \frac{4EI_2}{L_2}+\frac{4EI_1}{L_1} \end{bmatrix}$$

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \qquad \{B\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan nilai – nilai E, I,A dan L serta P yang bersangkutan maka dapat disusun hubungan [K]{X}={B} sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 7213553{,}568 & 0 & 33883{,}92 & -7200000 & 0 & 0 \\ 0 & 3832686{,}367 & 184402{,}3 & 0 & -52686{,}4 & 184402{,}3 \\ 33883{,}92 & 184402{,}3 & 973490{,}4 & 0 & -184402{,}3 & 430272 \\ -7200000 & 0 & 0 & 7213553{,}568 & 0 & -33883{,}92 \\ 0 & -52686{,}4 & -184402{,}3 & 0 & 3832686{,}4 & -184402 \\ 0 & 184402{,}3 & 430272 & -33883{,}92 & -184402{,}3 & 973490{,}4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 120 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Lakukan Dekomposisi untuk matriks [K} dengan cara CHOLESKY

l_{11} = $\sqrt{a_{11}} = \sqrt{7213553{,}568}$ = 2685,805944

l_{21} = $\frac{a_{21}}{l_{11}}$ = 0

l_{22} = $\sqrt{a_{22} - l_{21}^{\ 2}} = \sqrt{3832686{,}367 - 0}$ = 1957,724793

l_{31} $= \dfrac{a_{31}}{l_{11}} = \dfrac{33883{,}92}{2685{,}805944} = 12{,}61592263$

l_{32} $= \dfrac{a_{32} - l_{21}.l_{31}}{l_{22}} = \dfrac{184402{,}3}{1957{,}724793} = 94{,}19213894$

l_{33} $= \sqrt{a_{33} - l_{31}{}^2 - l_{32}{}^2} = \sqrt{973490{,}4 - 12{,}61592263^2 - 94{,}19213894^2} = 982{,}0687753$

l_{41} $= \dfrac{a_{41}}{l_{11}} = \dfrac{-7200000}{2685{,}805944} = -2680{,}759575$

l_{42} $= \dfrac{a_{42} - l_{21}.l_{41}}{l_{22}} = 0$

l_{43} $= \dfrac{a_{43} - l_{31}.l_{41} - l_{32}.l_{42}}{l_{33}} = \dfrac{0 - (12{,}61592263 \times -2680{,}759575) - 0}{982{,}0687753}$

$= 34{,}43776672$

l_{44} $= \sqrt{a_{44} - l_{41}{}^2 - l_{42}{}^2 - l_{43}{}^2} = \sqrt{7213553{,}568 - (-2680{,}759575)^2 - 0 - (34{,}43776672)^2}$

$= 160{,}9214382$

l_{51} $= \dfrac{a_{51}}{l_{11}} = 0$

l_{52} $= \dfrac{a_{52} - l_{21}.l_{51}}{l_{22}} = \dfrac{-52686{,}4}{1957{,}724793} = -26{,}9120397$

l_{53} $= \dfrac{a_{53} - l_{31}.l_{51} - l_{32}.l_{52}}{l_{33}} = \dfrac{-184402{,}2857 - 0 - (94{,}19213894 \times -26{,}9120397)}{982{,}0687753}$

$= -185{,}1880313$

l_{54} $= \dfrac{a_{54} - l_{41}.l_{51} - l_{42}.l_{52} - l_{43}.l_{53}}{l_{44}} = \dfrac{-(34{,}43776672 \times -185{,}1880313)}{160{,}9214382}$

$= 39{,}63090495$

l_{55} $= \sqrt{a_{55} - l_{51}{}^2 - l_{52}{}^2 - l_{53}{}^2 - l_{54}{}^2}$

$= \sqrt{3832686{,}367 - (-26{,}9120397)^2 - (-185{,}1880313)^2 - (39{,}63090495)^2}$

$= 1948{,}357486$

l_{61} $= \dfrac{a_{61}}{l_{11}} = 0$

l_{62} $= \dfrac{a_{62} - l_{21}.l_{61}}{l_{22}} = \dfrac{184402{,}2857}{1957{,}724793} = 94{,}19213894$

l_{63} $= \dfrac{a_{63} - l_{31}.l_{61} - l_{32}.l_{62}}{l_{33}} = \dfrac{430272 - (94{,}19213894 \times 94{,}19213894)}{982{,}0687753}$

= 429,0940223

l_{64} $= \dfrac{a_{64} - l_{41}.l_{61} - l_{42}.l_{62} - l_{43}.l_{63}}{l_{44}}$

$= \dfrac{-33883{,}92 - (34{,}43776672 \times 429{,}0940223)}{160{,}9214382}$ = – 302,389541

l_{65} $= \dfrac{a_{65} - l_{51}.l_{61} - l_{52}.l_{62} - l_{53}.l_{63} - l_{54}.l_{64}}{l_{55}}$

$= \dfrac{-184402{,}2857 - (-26{,}9120397 \times 94{,}19213894) - (-185{,}1880313 \times 429{,}0940223)}{1948{,}357486}$

$- \dfrac{(39{,}63090495 \times -302{,}389541)}{1948{,}357486}$

= – 46,40849299

l_{66} $= \sqrt{a_{66} - l_{61}{}^2 - l_{62}{}^2 - l_{63}{}^2 - l_{64}{}^2 - l_{65}{}^2}$

$= \sqrt{973490{,}4 - (94{,}19213894)^2 - (429{,}0940223)^2 - (-302{,}389541)^2 - (-46{,}40849299)^2}$

= 828,7963431

A. [L]{D} = {B}

$$\begin{bmatrix} 2685{,}805944 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1957{,}724793 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12{,}61592263 & 94{,}19213894 & 982{,}0687753 & 0 & 0 & 0 \\ -2680{,}759575 & 0 & 34{,}43776672 & 160{,}9214382 & 0 & 0 \\ 0 & -26{,}9120397 & -185{,}1880313 & 39{,}63090495 & 1948{,}357486 & 0 \\ 0 & 94{,}19213894 & 429{,}0940223 & -302{,}389541 & -46{,}40849299 & 828{,}7963431 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 120 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

1) 2685,805944.d_1 = 0 $\rightarrow d_1 = 0$

2) 1957,724793.d_2 = 0 $\rightarrow d_2 = 0$

3) 12,61592263.d_1 + 94,19213894.d_2 + 982,0687753.d_3 = 0 $\rightarrow d_3 = 0$

4) –2680,759575.d_1 + 34,43776672.d_3 + 160,9214382.d_4 = 120

$\rightarrow d_4$ = 0,7457054905

5) –26,9120397.d_2 – 185,1880313.d_3 + 39,63090495.d_4 + 1948,357486.d_5 = 0

$\rightarrow d_5$ = –0,01516815247

6) 94,192138944.d_2 + 429,0940223.d_3 – 302,389541.d_4 – 46,40849299.d_5

+ 828,7963431.d_6 = 0 $\rightarrow d_6 = 0$

B. [U]{X}={D}

$$\begin{bmatrix} 2685{,}805944 & 0 & 12{,}61592263 & -2680{,}759575 & 0 & 0 \\ 0 & 1957{,}724793 & 94{,}19213894 & 0 & -26{,}9120397 & 94{,}19213894 \\ 0 & 0 & 982{,}0687753 & 34{,}43776672 & -185{,}1880313 & 429{,}0940223 \\ 0 & 0 & 0 & 160{,}9214382 & 39{,}63090495 & -302{,}389541 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1948{,}357486 & -46{,}40849299 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 828{,}7963431 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}7457054905 \\ -0{,}01516815247 \\ 0{,}2712234329 \end{Bmatrix}$$

1) $828{,}7963431.\theta_3 = 0{,}2712234329 \quad \rightarrow \theta_3 = 3{,}2725.10^{-4}$

2) $1948{,}357486.v_3 - 46{,}40849299.\theta_3 = -0{,}01516815247 \quad \rightarrow v_3 = 0$

3) $160{,}9214382.u_3 + 39{,}63090495.v_3 - 302{,}389541.\theta_3 = 0{,}7457054905$

$\rightarrow u_3 = 5{,}248911.10^{-3}$

4) $982{,}0687753.\theta_2 + 34{,}43776672.u_3 - 185{,}1880313.v_3 + 429{,}0940223.\theta_3 = 0$

$\rightarrow \theta_2 = -3{,}27044.10^{-4}$

5) $1957{,}724793.v_2 + 94{,}19213894.\theta_2 - 26{,}9120397.v_3 + 94{,}19213894.\theta_3 = 0$

$\rightarrow v_2 = 0$

6) $2685{,}805944.u_2 + 12{,}61592263.\theta_2 - 2680{,}759575.u_3 = 0$

$\rightarrow u_2 = 5{,}2405.10^{-3}$

Sehingga :

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5{,}2405.10^{-3} \\ 0 \\ -3{,}27044.10^{-4} \\ 5{,}248911.10^{-3} \\ 0 \\ 3{,}2725.10^{-4} \end{Bmatrix}$$

3.8.2 Bidang Manajemen Konstruksi

Dalam suatu perencanaan satu “batch” beton, diperlukan material berturut – turut : pasir (28 m^3), agregat kasar 10-20 mm (30 m^3), agregat kasar 30 – 40 mm (18 m^3). Terdapat tiga sumber bahan dengan kandungan material sebagai berikut :

	Pasir %	Agregat 10-20 mm %	Agregat 30-40 mm %
Sumber 1	30	40	30
Sumber 2	25	50	25
Sumber 3	52	30	18

Berapa m^3-kah yang harus digali dari ketiga sumber tersebut untuk memenuhi kebutuhan kontraktor ?

Dari data – data di atas dibentuk persamaan :

30%sumber1 + 25%sumber2 + 52%sumber3 = total pasir

40%sumber1 + 50%sumber2 + 30%sumber3 = total agregat 10-20 mm

30%sumber1 + 25%sumber2 + 18%sumber3 = total agregat 30-40 mm

Dengan memasukkan data kebutuhan material, maka dapat dituliskan SPL dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} 0{,}30 & 0{,}25 & 0{,}52 \\ 0{,}40 & 0{,}50 & 0{,}30 \\ 0{,}30 & 0{,}25 & 0{,}18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Sumber1 \\ Sumber2 \\ Sumber3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Setelah eliminasi diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 0{,}30 & 0{,}25 & 0{,}52 \\ 0 & 0{,}1667 & -0{,}39333 \\ 0 & 0 & -0{,}34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Sumber1 \\ Sumber2 \\ Sumber3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -7{,}3333 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Dan akhirnya dengan substitusi mundur, diperoleh banyaknya galian yang harus diperoleh dari setiap sumber adalah :

Sumber 1 = 21,181 m^3

Sumber 2 = 25,40628 m^3

Sumber 3 = 29,41176 m^3

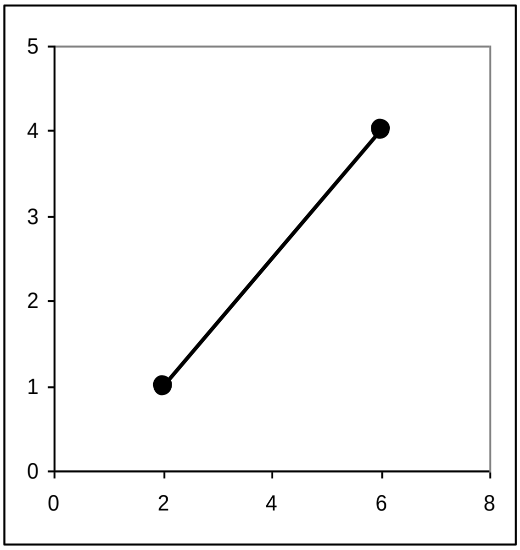
BAB IV

INTERPOLASI

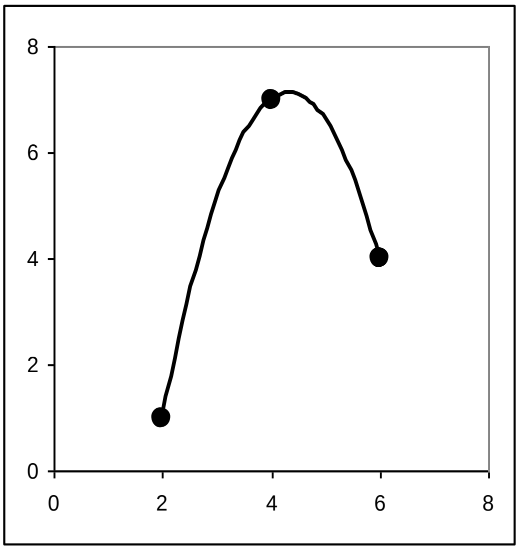
Jika suatu saat kita dihadapkan pada suatu data, maka sering kali kita dituntut untuk mencari suatu nilai di antara titik data yang tak diketahui sebelumnya. Metoda yang sering digunakan adalah dengan menggunakan suatu polinom (suku banyak). Perhatikan kembali rumusan untuk suatu polinom berderajat n adalah :

$$f(x) = a_o + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + \ldots.. + a_n.x_n \qquad 4.1$$

Untuk *n+1* buah titik data maka akan terdapat suatu polinom orde n atau kurang yang melalui semua titik. Sebagai ilustrasi dalam gambar 4.1.a maka hanya terdapat satu garis lurus (polinom derajat 1) yang menghubungkan 2 buah titik data. Hanya terdapat satu polinom derajat dua (parabola) yang menghubungkan ketiga titik data (4.1.b). dalam bab ini akan dibahas interpolasi dengan menggunakan metoda polinom Newton dan Lagrange.



Gambar 4.1.a Interpolasi Linear



Gambar 4.1.b Interpolasi Kuadrat

4.1 Polinom Interpolasi Newton

4.1.1 Interpolasi Linear

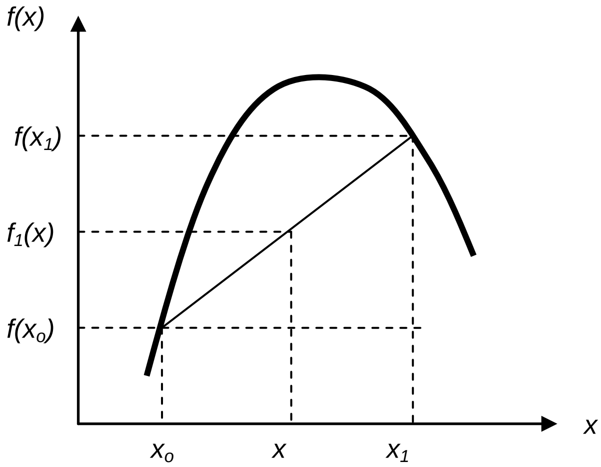
Bentuk interpolasi paling sederhana ialah interpolasi linear, yang dilakukan dengan jalan menghubungkan dua buah titik data dengan suatu garis lurus. Dan dengan menggunakan hukum segitiga sebangun (gambar 4.2) maka diperoleh hubungan :

$$\frac{f_1(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o} \qquad 4.2.a$$

Yang bisa dituliskan kembali dalam bentuk :

$$f_1(x) = f(x_o) + \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o}.(x - x_o) \qquad 4.2.b$$

Persamaan 4.2.b merupakan persamaan umum interpolasi linear.



Gambar 4.2 Pemahaman Interpolasi Linear Secara Grafik

4.1.2 Interpolasi Kuadrat

Jika terdapat tiga titik data, maka interpolasi dapat dilakukan secara kuadrat. Yang mempunyai bentuk :

$$f_2(x) = b_o + b_1(x - x_o) + b_2(x - x_o)(x - x_1) \qquad 4.3$$

Dengan koefisien – koefisien b_o, b_1 dan b_2 berturut – turut adalah :

$$b_o = f(x_o) \qquad 4.4.a$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o} \qquad 4.4.b$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_o)}{x_1-x_o}}{x_2-x_o} \qquad 4.4.c$$

Contoh :

Diketahui nilai *ln* 1 = 0, *ln* 4 = 1,3862944 dan *ln* 6 = 1,7917595. Hitunglah nilai dari *ln* 2 dengan :

a. menggunakan data *ln* 1 dan *ln* 4 (interpolasi linear)
b. menggunakan data *ln* 1, *ln* 4 dan *ln* 6 (interpolasi kuadrat)

(nilai eksak dari *ln* 2 = 0,69314718)

Dengan menggunakan persamaan 4.2.b :

$$f_1(2) = 0 + \frac{1{,}3862944-0}{4-1}(2-1) = 0{,}46209813$$

$$\varepsilon_t = \frac{0{,}69314718-0{,}46209813}{0{,}69314718}\times 100\% = 33{,}3\%$$

Dengan memakai persamaan 4.3, 4.4.a, 4.4.b dan 4.4.c maka :

$$b_o = 0$$

$$b_1 = \frac{1{,}3862944-0}{4-1} = 0{,}46209813$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{1{,}7917595-1{,}3862944}{6-4} - 0{,}46209813}{6-1} = -\,0{,}051873116$$

Substitusikan nilai – nilai b_o, b_1 dan b_2 ke persamaan 4.3 untuk memperoleh bentuk :

$$f_2(x) = 0 + 0{,}46209813.(x-1) - 0{,}051873116.(x-1)(x-4)$$

Dan untuk mendapatkan nilai *ln* 2, kita substitusikan x = 2 ke dalam persamaan tersebut :

$$f_2(2) = 0{,}56584436$$

$$\varepsilon_t = \frac{0{,}69314718-0{,}56584436}{0{,}69314718}\times 100\% = 18{,}4\ \%$$

4.1.3 Interpolasi orde n

Jika terdapat *n+1* data maka dapat dilakukan interpolasi orde n seperti dibahas dalam sub bab berikut. Perhatikan bahwa polinom derajat *n* dalam 4.1 dapat dituliskan kembali dalam bentuk :

$$f_n(x) = b_o + b_1(x-x_o) + \ldots + b_n(x-x_o)(x-x_1)(x-x_{n-1}) \qquad 4.5$$

Dengan memakai titik – titik data yang diketahui, maka koefisien – koefisien b_o, b_1, b_2, …. b_n dapat dihitung sebagai berikut :

$$b_o = f(x_o) \qquad 4.6.a$$

$$b_1 = f[x_1.x_o] \qquad 4.6.b$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_o] \qquad 4.6.c$$

…....

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots\ldots, x_1, x_o] \qquad 4.6.d$$

Fungsi di dalam kurung siku adalah *finite divided difference* (beda terbagi hingga). *First divided difference* dinyatakan secara umum sebagai :

$$f[x_i,x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \qquad 4.7$$

Sedangkan *second divided difference*, adalah merupakan perbedaan dari dua beda terbagi pertama, yang dirumuskan sebagai :

$$f[x_i,x_j,x_k] = \frac{f[x_i,x_j] - f[x_j,x_k]}{x_i - x_k} \qquad 4.8$$

Dan beda terbagi hingga ke-n adalah :

$$f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_1,x_o] = \frac{f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_1] - f[x_{n-1},x_{n-2},x_o]}{x_n - x_o} \qquad 4.9$$

Persamaan 4.7 hingga 4.9 dapat dipakai untuk menghitung koefisien – koefisien dalam persamaan 4.6, dan kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan 4.5 untuk mendapatkan polinom interpolasi beda terbagi Newton (*divided – difference interpolating polinomial*) :

$$f_n(x) = f(x_o) + (x-x_o)f[x_1,x_o] + (x-x_o)(x-x_1)f[x_2,x_1,x_o] + \ldots\ldots$$

$$+ (x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_o] \qquad 4.10$$

Tabel 4.1 memberikan skema cara mencari beda terbagi hingga pertama, kedua hingga ketiga.

Gambar 4.3 Skema Pencarian Beda Terbagi Hingga

i	x_i	$f(x_i)$	pertama	kedua	Ketiga
0	x_0	$f(x_o)$	$f[x_1,x_o]$	$f[x_2,x_1,x_o]$	$f[x_3,x_2,x_1,x_o]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2,x_1]$	$f[x_3,x_2,x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3.x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

Contoh :

Diketahui titik – titik data sebagai berikut :

x_i	$f(x_i)$
$x_o = 1$	0
$x_1 = 4$	1,3862944
$x_2 = 6$	1,7917595
$x_3 = 5$	1,6094379

Gunakan Interpolasi Polinom beda terbagi Newton orde ketiga, untuk mendapatkan nilai $f(2)$!

Polinom orde ketiga, dari persamaan 4.5 (dengan $n = 3$) adalah :

$$f_3(x) = b_o + b_1(x-x_o) + b_2(x-x_o)(x-x_1) + b_3(x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)$$

Koefisien – koefisien b_o, b_1, b_2 dan b_3 dicari dari persamaan 4.7, 4.8 dan 4.9, hasilnya ditabelkan sebagai berikut :

i	x_i	$f(x_i)$	pertama	kedua	Ketiga
0	x_0=1	0	0,46209813	- 0,051873116	0,0078655415
1	x_1=4	1,3862944	0,20273255	0,020410950	
2	x_2=6	1,7917595	0,18232160		
3	x_3=5	1,6094379			

Baris teratas dari tabel tersebut merupakan koefisien – koefisien polinom, yakni :

$$b_o = f(x_o) = 0$$

$$b_1 = f[x_1,x_o] = 0,46209813$$

$$b_2 = f[x_2,x_1,x_o] = -\,0,051873116$$

$$b_3 = f[x_3,x_2,x_1,x_o] = 0,0078655415$$

Sehingga polinom yang terbentuk adalah :

$$f_3(x) = 0 + 0,46209813(x-1) - 0,051873116(x-1)(x-4) + 0,0078655415(x-1)(x-4)(x-6)$$

Dan dapat dipakai untuk menghitung $f_3(2) = 0,62876869$

4.2 Polinom Interpolasi Lagrange

Dari Interpolasi Newton orde pertama diperoleh bentuk :

$$f_1(x) = f(x_o) + (x-x_o).f[x_1,x_o] \qquad 4.11$$

Dengan

$$f[x_1,x_o] = \frac{f(x_1)-f(x_o)}{x_1-x_o} \qquad 4.12$$

Yang dapat ditulis dalam bentuk :

$$f[x_1,x_o] = \frac{f(x_1)}{x_1-x_o} + \frac{f(x_o)}{x_o-x_1} \qquad 4.13$$

Substitusikan 4.13 ke 4.11 untuk mendapatkan :

$$f_1(x) = f(x_o) + \frac{(x-x_o)}{(x_1-x_o)}.f(x_1) + \frac{(x-x_o)}{(x_o-x_1)}.f(x_o) \qquad 4.14$$

Akhirnya dengan mengelompokkan suku-suku yang serupa dan penyederhanaan akan diperoleh bentuk polinom Interpolasi Lagrange orde satu sebagai berikut :

$$f_1(x) = \frac{x-x_1}{x_o-x_1}.f(x_o) + \frac{x-x_o}{x_1-x_o}.f(x_1) \qquad 4.15$$

Secara umum bentuk polinom Interpolasi Lagrange adalah :

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x).f(x_i) \qquad 4.16$$

Dengan

$$L_i(x) = \prod_{j=0;\, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad 4.17$$

Notasi Π mempunyai arti sebagai "hasil kali dari". Contoh untuk interpolasi linear ($n = 1$) adalah persamaan 4.15 di atas. Sedangkan untuk orde dua (interpolasi kuadrat) adalah :

$$f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)}.f(x_o) + \frac{(x-x_o)(x-x_2)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)}.f(x_1)$$
$$+ \frac{(x-x_o)(x-x_1)}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)}.f(x_2) \qquad 4.18$$

Contoh :

Gunakan polinom interpolasi Lagrange orde pertama dan kedua untuk menghitung nilai *ln 2*, berdasarkan data yang diberikan dalam contoh sebelumnya.

x_o	= 1	$f(x_o)$	= 0
x_1	= 4	$f(x_1)$	= 1,3862944
x_2	= 6	$f(x_2)$	= 1,7917595

Polinom orde pertama, berdasarkan persamaan 4.15 untuk $x = 2$ adalah :

$$f_1(2) = \frac{2-4}{1-4}.0 + \frac{2-1}{4-1}.1{,}3862944 = 0{,}4620981$$

Polinom orde dua, dari persamaan 4.18 untuk $x = 2$ adalah :

$$f_2(x) = \frac{(2-4)(2-6)}{(1-4)(1-6)}.0 + \frac{(2-1)(2-6)}{(4-1)(4-6)}.1{,}3862944$$

$$+ \frac{(2-1)(2-4)}{(6-1)(6-4)}.1{,}7917595 = 0{,}56584437$$

Hasil yang diperoleh melalui Interpolasi Lagrange ternyata cukup dekat dengan Interpolasi Newton.

4.3 Interpolasi Dalam Bidang Teknik Sipil

4.3.1 Bidang Rekayasa Struktur

Contoh 1 : Sebuah eksperimen dilakukan untuk menentukan kapasitas momen ultimit dari sebuah balok beton sebagai fungsi dari luas penampang melintang. Eksperimen memberikan data sebagai berikut :

Kapasitas Momen Ultimit (k.lb)	932,3	1785,2	2558,6	3252,7
Luas (in^2)	1	2	3	4

Perkirakan kapasitas momen ultimit balok beton dengan luas penampang melintang sebesar 2,5 in^2.

Dalam menyelesaikan soal ini akan digunakan interpolasi spline kuadrat, dengan menerapkan persamaan 4.22 hingga 4.25 didapatkan persamaan :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1785,2 \\ 1785,2 \\ 2558,6 \\ 2558,6 \\ 932,3 \\ 3252,7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solusi dari sistem persamaan linear di atas adalah :

$a_1 = 0$ $\quad$ $a_2 = -79,5$ $\quad$ $a_3 = 0,2$

$b_1 = 852,9$ $\quad$ $b_2 = 1170,9$ $\quad$ $b_3 = 692,7$

$c_1 = 79,4$ $\quad$ $c_2 = -238,6$ $\quad$ $c_3 = 478,7$

Karena luas 2,5 in^2 terletak pada selang kedua maka nilai kapasitas momen ultimit dihitung dari persamaan :

$$f_2(x) = -79,5.x^2 + 1170,9.x - 238,6$$

$$f_2(2,5) = -79,5(2,5)^2 + 1170,9(2,5) - 238,6 = 2191,775 \text{ k.lb}$$

Sehingga balok dengan luas penampang 2,5 in^2 akan mempunyai kapasitas momen ultimit sebesar 2191,775 k.lb.

Contoh 2 : Suatu percobaan dilakukan untuk mengetahui persentase regangan suatu material sebagai fungsi temperatur. Data hasil percobaan adalah sebagai berikut :

Temperatur (F)	400	500	600	700	800	900	1000	1100
Regangan (%)	11	13	13	15	17	19	20	23

Gunakan interpolasi beda terbagi hingga Newton orde ketujuh untuk menghitung persentase regangan pada temperatur 780^{o}F.

Temperatur	Regangan	Pertama	Kedua	Ketiga	Keempat	Kelima	Keenam	Ketujuh
400	11	0,02	-0,0001	6,66667E-07	-2,5E-09	6,66667E-12	-1,52778E-14	3,76984E-17
500	13	0	0,0001	-3,33333E-07	8,33333E-10	-2,5E-12	1,11111E-14	
600	13	0,02	0	0	-4,16667E-10	4,16667E-12		
700	15	0,02	0	-1,66667E-07	1,66667E-09			
800	17	0,02	-0,00005	5,E-07				
900	19	0,01	0,0001					
1000	20	0,03						
1100	23							

Substitusikan nilai – nilai di atas ke persamaan 4.10 sehingga memberikan nilai regangan sebesar 16,607% pada temperatur 780^{o}F.

4.3.2 Bidang Rekayasa Sumber Daya Air

Contoh : Viskositas suatu cairan X dapat ditentukan dengan menggunakan tabel berikut :

T (^{o}C)	0	20	40	60	80	100
μ (10^{-3} Ns/m^2)	1,8	1,4	1,2	0,9	0,75	0,5

Perkirakan nilai viskositas cairan X tersebut pada temperatur kamar 25^o C. Gunakan interpolasi Lagrange orde kelima.

Interpolasi Lagrange orde kelima dirumuskan sebagai :

$$f_5(x) = \sum_{i=0}^{5} L_i(x).f(x)$$

$$= L_0(x).f(x_0) + L_1(x).f(x_1) + L_2(x).f(x_2) + L_3(x).f(x_3) + L_4(x).f(x_4) + L_5(x).f(x_5)$$

Dengan :

$$L_0(x) = \prod_{0,j\neq 0}^{5} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$= \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\right)\left(\frac{x-x_3}{x_0-x_3}\right)\left(\frac{x-x_4}{x_0-x_4}\right)\left(\frac{x-x_5}{x_0-x_5}\right)$$

Untuk nilai x = 25, serta mensubstitusikan nilai – nilai x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 maka diperoleh nilai $L_0(25)$ = – 0,02819824219

Dengan cara yang serupa, maka diperoleh pula :

$L_1(25)$ = 0,7049560547

$L_2(25)$ = 0,4699707031

$L_3(25)$ = – 0,2014160156

$L_4(25)$ = 0,06408691406

$L_5(25)$ = – 0,009399414063

Sehingga :

$$f_5(25) = L_0(25).f(x_0) + L_1(25).f(x_1) + L_2(25).f(x_2) + L_3(25).f(x_3) + L_4(25).f(x_4) + L_5(25).f(x_5)$$

$$= 1,3622$$

Nilai viskositas cairan X pada temperatur 25^{o} C adalah sebesar $1,3622.10^{-3}$ Ns/m2

DAFTAR PUSTAKA

1. Chapra, S.C., Canale, R.P., ***Numerical Methods For Engineers, Second Edition***, Mc Graw-Hill, Inc., 1990
2. Conte, S.D., de Boor, C., ***Elementary Numerical Analysis an Algorithmic Approach***, Second Edition, Mc Graw-Hill Kogakusah, Ltd., 1972
3. Gerald, C.F., Wheatly, P.O., ***Applied Numerical Analysis***, Fifth Edition, Addison-Wesley Publishing Co., 1994
4. Nasution, A., Zakaria, H., **Metode Numerik dalam Ilmu Rekayasa Sipil**, Penerbit ITB, 2001
5. Triatmodjo, B., **Metode Numerik**, Beta Offset, 1996