

Mata Kuliah : Statika & Mekanika Bahan
Kode : CIV - 102
SKS : 4 SKS

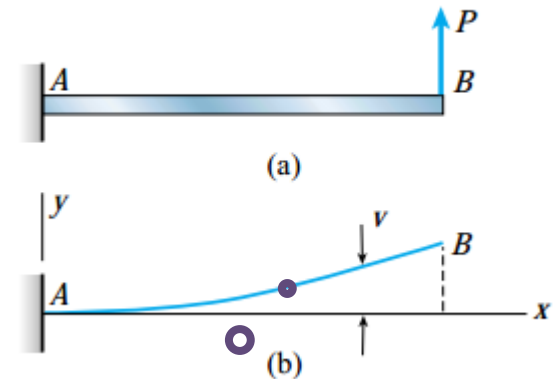
Tegangan Dalam Balok

Pertemuan – 14,15

- Kemampuan akhir yang diharapkan
 - Mahasiswa mampu menghitung besarnya tegangan normal dan geser pada suatu elemen balok
- Bahan Kajian (Materi Ajar)
 - ✓ Konsep Lentur Murni
 - ✓ Kelengkungan Balok
 - ✓ Regangan Longitudinal pada Balok
 - ✓ Tegangan Normal pada Balok

Konsep Lentur Murni

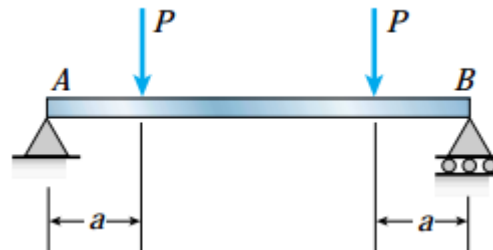
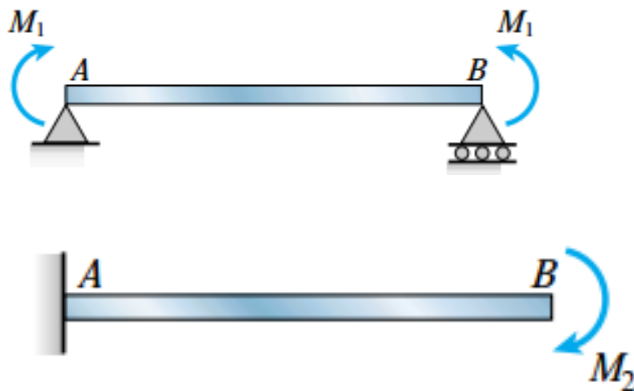
- Beban yang bekerja pada balok menyebabkan balok melentur, sehingga sumbu balok yang semula lurus akan melentur membentuk lengkungan yang disebut **kurva defleksi (lendutan)** balok
- Karena kurva defleksi berada dalam bidang xy , maka bidang ini disebut sebagai **bidang lentur (plane of bending)**



Kurva
Defleksi

Konsep Lentur Murni

- Suatu balok dikatakan mengalami **lentur murni (pure bending)** apabila balok tersebut memikul momen lentur konstan, tanpa adanya pengaruh gaya geser
- Keadaan sebaliknya disebut dengan **lentur tak seragam (non uniform bending)** dimana balok memikul momen lentur disertai dengan gaya geser



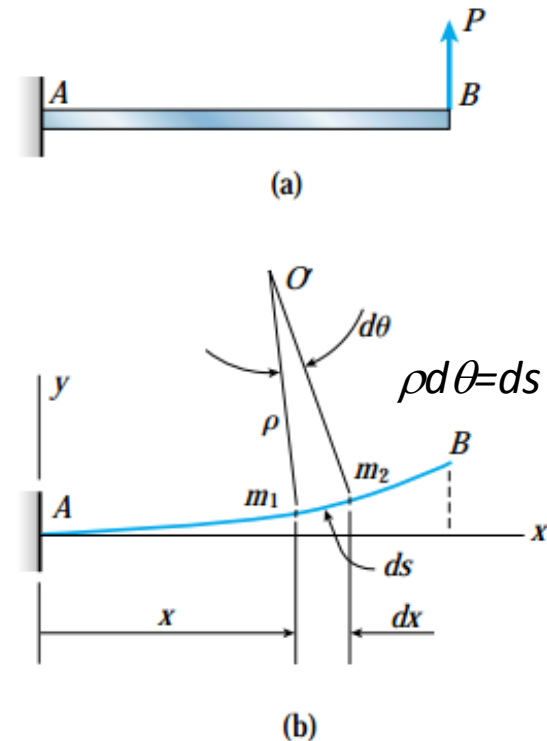
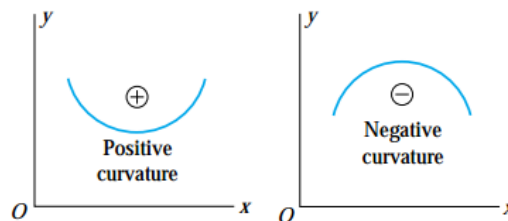
Mana yang lentur murni, mana yang bukan ??

Kelengkungan Balok

- Akibat beban yang bekerja, suatu balok akan berubah bentuk menjadi suatu lengkungan. Regangan dan tegangan yang terjadi pada balok ini sebanding dengan **kelengkungan (curvature)** dari kurva defleksi
- Jika ρ adalah **radius kelengkungan**, dan κ adalah **kelengkungannya**, maka hubungan keduanya adalah :

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \approx \frac{d\theta}{dx}$$

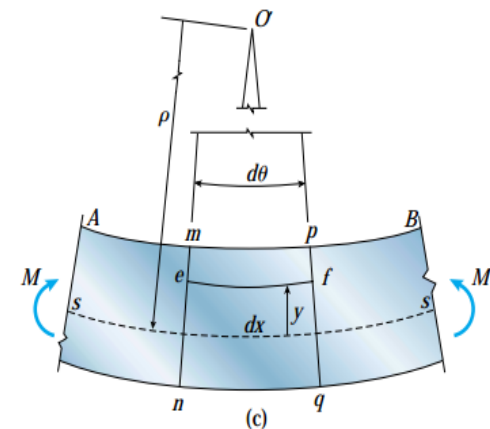
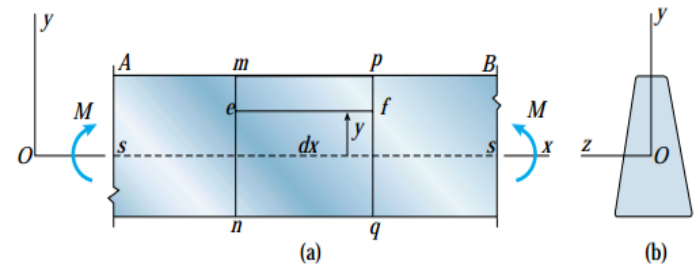
- Kelengkungan adalah positif jika balok cekung ke atas dan sebaliknya negatif apabila balok cekung ke bawah



Regangan Longitudinal pada Balok

- **Regangan longitudinal** di suatu balok dapat diperoleh dengan menganalisis kelengkungan suatu balok beserta deformasinya
- Balok pada gambar di samping memiliki **sumbu netral z**, di mana **pada sumbu ini tegangan pada balok bernilai nol**
- Bagian bawah balok mengalami **tarik**, sedang bagian atas **tertekan**
- Tinjau **garis ef** berjarak **y** dari atas sumbu netral yang memiliki panjang mula-mula **dx**
- Setelah terlentur, maka panjang garis ef adalah :

$$L_1 = (\rho - y)d\theta = dx - \frac{y}{\rho} dx$$



Sumbu netral selalu melewati pusat berat suatu penampang apabila bahannya mengikuti Hukum Hooke

Regangan Longitudinal pada Balok

- Karena panjang semula garis ef adalah sama dengan dx , maka perubahan panjangnya adalah $L_1 - dx$ atau sama dengan $-ydx/\rho$
- Regangan yang terjadi sama dengan perubahan panjang dibagi panjang mula-mula, atau :

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y$$

- Dengan κ adalah kelengkungan
- Regangan di suatu balok yang mengalami lentur murni bervariasi secara **linier terhadap jarak dari sumbu netral**

Tegangan Normal pada Balok

- Mengingat Hukum Hooke untuk tegangan uniaksial, maka tegangan pada balok dapat dituliskan menjadi :

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{Ey}{\rho} = -E\kappa y$$

- Pertambahan momen lentur, dM adalah :

$$dM = -\sigma_x y dA$$

- Jika diintegrasikan $M = -\int_A \sigma_x y dA = \int_A \kappa E y^2 dA$

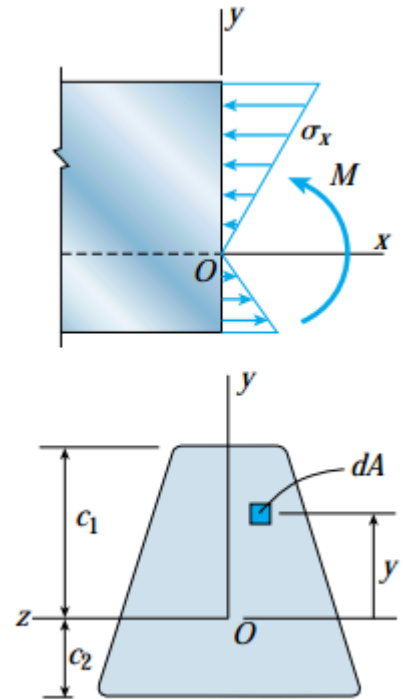
- Akhirnya dapat diperoleh hubungan

$$M = \kappa EI$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

EI dikenal sebagai kekakuan lentur

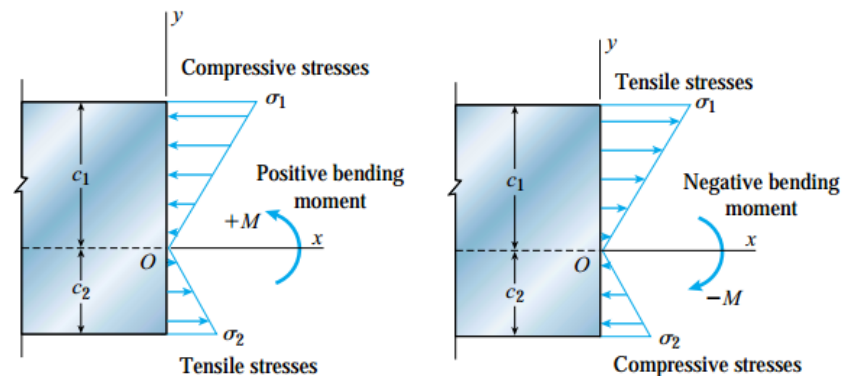
Karena $dx = \rho d\theta$, maka dapat dituliskan : $d\theta = \frac{M}{EI} dx$



Tegangan Normal pada Balok

- Dari persamaan-persamaan di atas, maka dapat diturunkan rumus untuk menghitung tegangan lentur pada penampang balok

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$



Jika momen lentur di suatu balok bernilai positif, maka tegangan lentur akan positif (tarik) di bagian penampang di mana y adalah negatif, artinya di bagian bawah balok. Sedangkan bagian atasnya tegangan lentur bernilai negatif (tekan).

Tegangan Normal pada Balok

- Tegangan lentur tarik dan tekan maksimum yang bekerja di suatu penampang *terjadi di titik yang terletak paling jauh dari sumbu netral*
- Dari gambar sebelumnya, maka tegangan lentur maksimum yang terjadi adalah :

$$\sigma_1 = -\frac{Mc_1}{I} = -\frac{M}{S_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{Mc_2}{I} = \frac{M}{S_2}$$

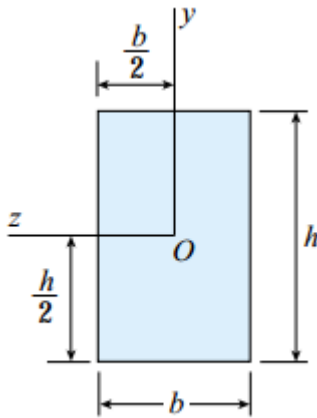
- Dengan

$$S_1 = \frac{I}{c_1}$$

$$S_2 = \frac{I}{c_2}$$

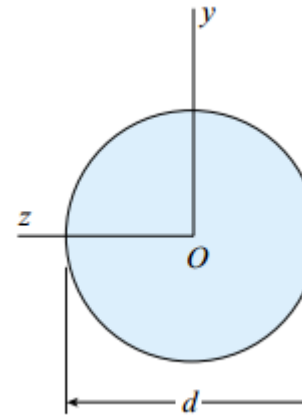
Besaran S_1 dan S_2 disebut dengan istilah Modulus Penampang (*Section Modulus*)

Tegangan Normal pada Balok



$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$S = \frac{bh^2}{6}$$



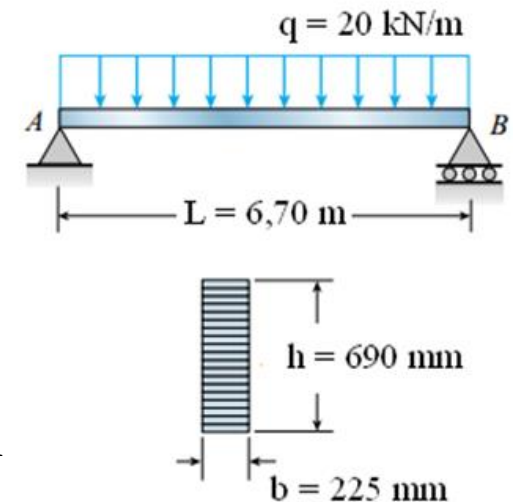
$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$S = \frac{\pi d^3}{32}$$

Tegangan Normal pada Balok

Contoh 1

Sebuah balok sederhana AB dengan panjang bentang $L = 6,70$ m memikul beban terbagi rata dengan intensitas $q = 20$ kN/m. Beban terbagi rata tersebut meliputi juga berat sendiri balok. Balok ini terbuat dari kayu lapis (glued laminated wood) dan mempunyai penampang dengan lebar $b = 225$ mm dan tinggi $h = 690$ mm. Hitung tegangan tarik dan tekan maksimum di balok akibat lentur



Jawab : $M = 1/8qL^2 = 112,225 \text{ kNm} = 112,225 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{225(690)^2}{6} = 17.853.750 \text{ mm}^3$$

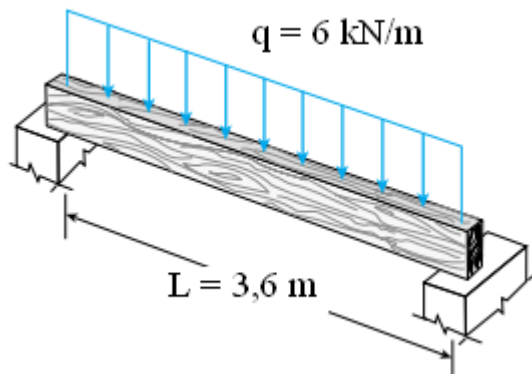
$$\sigma_c = \sigma_t = \frac{M}{S} = \frac{112,225 \cdot 10^6}{17.853.750} = 6,29 \text{ MPa}$$

Tegangan Normal pada Balok

Contoh 2

Balok kayu yang ditumpu sederhana dengan bentang $L = 3,6$ m memikul beban terbagi rata $q = 6$ kN/m. Tegangan lentur ijin adalah 12,5 MPa, berat kayu adalah $5,5$ kN/m³. Tentukan ukuran balok yang memadai

Jawab :



Momen maksimum $M_{maks} = \frac{1}{8} q L^2 = 9,72 \text{ kN.m}$

Modulus penampang yang diperlukan $S = \frac{M_{maks}}{\sigma_{ijin}} = 777.600 \text{ mm}^3$

Karena $S = \frac{1}{6} b h^2$, dan dengan mengambil $b = 150$ mm, maka diperoleh

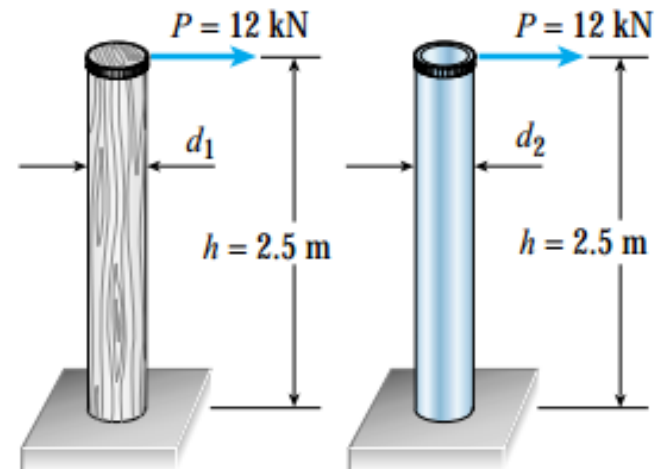
$h = 200$ mm

Tegangan Normal pada Balok

Contoh 3

Sebuah tiang vertikal yang tingginya 2,5 m memikul beban lateral $P = 12$ kN di ujung atasnya. Ada dua rencana yang diusulkan yaitu tiang kayu solid atau tabung aluminium berlubang.

- Hitung diameter minimum d_1 yang dibutuhkan untuk tiang kayu jika tegangan lentur ijin kayu adalah 15 MPa
- Hitung diameter luar minimum yang diperlukan d_2 untuk tabung aluminium jika tebal dinding adalah $1/8$ dari diameter luar dan tegangan lentur ijin aluminium adalah 50 MPa



Jawab :

Momen maksimum $M_{maks} = Ph = 12 \times 2,5 = 30 \text{ kN.m}$

a. Tiang kayu

Modulus penampang yang diperlukan $S = \frac{\pi d_1^3}{32} = \frac{M_{maks}}{\sigma_{ijin}} = \frac{30 \text{ kN.m}}{15 \text{ MPa}}$

Diperoleh $d_1 = 273 \text{ mm}$

b. Tabung aluminium

Tebal dinding tabung adalah $d_2/8$, sehingga diameter dalam tabung adalah $d_2 - d_2/4 = 0,75d_2$. Maka momen inersia tabung :

$$I = \frac{\pi}{64} [d_2^4 - (0,75d_2)^4] = 0,03356d_2^4$$

Modulus penampang tabung $S_2 = \frac{I}{c} = \frac{0,03356d_2^4}{d_2/2} = 0,06712d_2^3$

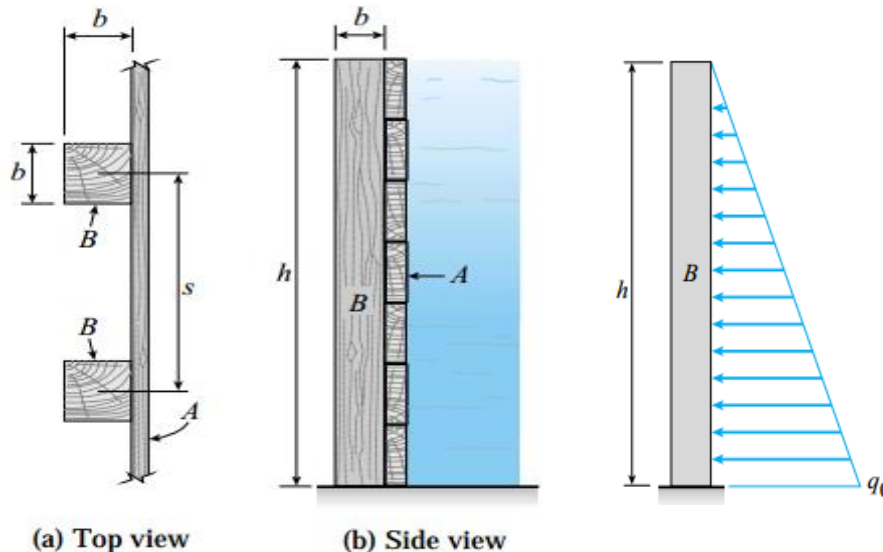
Modulus penampang yang diperlukan $S_2 = \frac{M_{maks}}{\sigma_{ijin}} = \frac{30 \text{ kN.m}}{50 \text{ MPa}} = 600 \times 10^3 \text{ mm}^3$

Dengan menyamakan keduanya diperoleh $d_2 = 208 \text{ mm}$, dengan diameter dalam 156 mm

Tegangan Normal pada Balok

Contoh 4

Sebuah tanggul kayu sementara terbuat dari papan-papan horizontal A yang dipikul oleh tiang-tiang kayu B yang tertanam di tanah sedemikian hingga berlaku sebagai balok kantilever. Tiang mempunyai penampang bujursangkar dan berjarak satu sama lain $s = 0,8$ m as ke as. Asumsikan bahwa ketinggian muka air di belakang tanggul sama dengan tinggi total tanggul $h = 2,0$ m. Tentukan dimensi b minimum yang dibutuhkan untuk tiang jika tegangan lentur ijin kayu adalah 8 MPa



Jawab :

$$q_0 = \gamma h s = 9,81 \text{ kN/m}^3 \times 2 \text{ m} \times 0,8 \text{ m} = 15,696 \text{ kN/m}$$

$$M_{maks} = \frac{q_0 h}{2} \times \frac{h}{3} = 10,464 \text{ kN.m}$$

$$\text{Modulus penampang yang diperlukan : } S = \frac{M_{maks}}{\sigma_{ijin}} = \frac{10,464 \times 10^6}{8} = \frac{1}{6} b^3$$

Dari persamaan tersebut diperoleh $b = 199 \text{ m}$ atau diambil $b = 200 \text{ mm}$.

Soal 4.1 – 4.17

- Sub Pokok Bahasan :
 - ✓ Tegangan Geser pada Balok
 - ✓ Balok Tersusun
 - ✓ Balok dengan Beban Aksial

Tegangan Geser pada Balok

- Balok yang memikul lentur murni, hanya akan timbul tegangan normal pada penampangnya
- Namun kebanyakan balok selain memikul momen lentur juga memikul gaya geser, sehingga selain tegangan normal akan timbul pula tegangan geser
- Pada suatu balok persegi yang memikul gaya geser sebesar V , akan timbul tegangan geser yang besarnya :

$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

Dengan :

V = gaya geser (N)

$Q = \int y dA$ = momen pertama/statis momen (mm^3)

I = momen inersia balok (mm^4)

B = lebar penampang balok (mm)

Tegangan Geser pada Balok (Persegi)

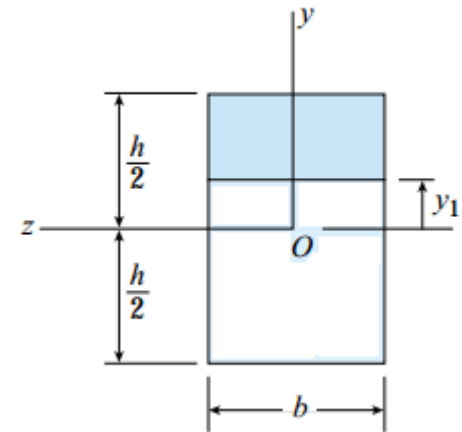
- Momen pertama Q dari bagian yang diarsir didapat dengan mengalikan luas dengan jarak titik beratnya ke sumbu netral

$$Q = b \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \left(y_1 + \frac{h/2 - y_1}{2} \right) = \dots$$

- Atau dengan integrasi : $Q = \int y dA = \int_{y_1}^{h/2} y \cdot b \cdot dy = \dots$

- Sehingga diperoleh :

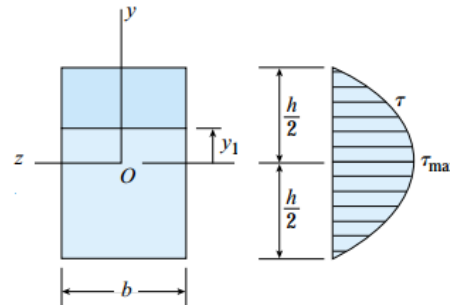
$$\tau = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$



Tegangan Geser pada Balok (Persegi)

- Rumus tersebut mengindikasikan bahwa **tegangan geser** di **balok persegi** bervariasi secara kuadratik terhadap jarak y_1 dari sumbu netral
- Perhatikan bahwa pada tegangan geser menjadi sama dengan nol pada saat $y_1 = h/2$ (atau di serat terluar balok)
- Sedangkan nilai maksimum tegangan geser terjadi pada sumbu netral saat $y_1 = 0$, yang besarnya :

$$\tau_{maks} = \frac{Vh^2}{8I} = \frac{3V}{2A}$$



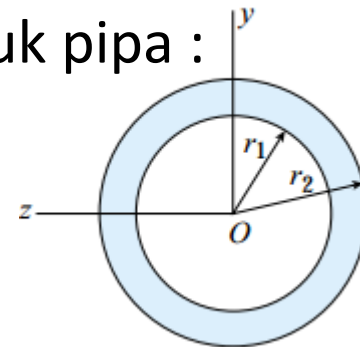
Tegangan Geser pada Balok (Lingkaran)

- Balok dengan penampang lingkaran pejal yang berjari-jari r , apabila memikul gaya geser V , maka akan timbul tegangan geser yang nilai maksimumnya terjadi pada sumbu netral penampang dan besarnya adalah :

$$\tau_{maks} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{V(2r^3 / 3)}{(\pi r^4 / 4)(2r)} = \frac{4V}{3\pi r^2} = \frac{4V}{3A}$$

- Sedangkan untuk penampang berbentuk pipa :

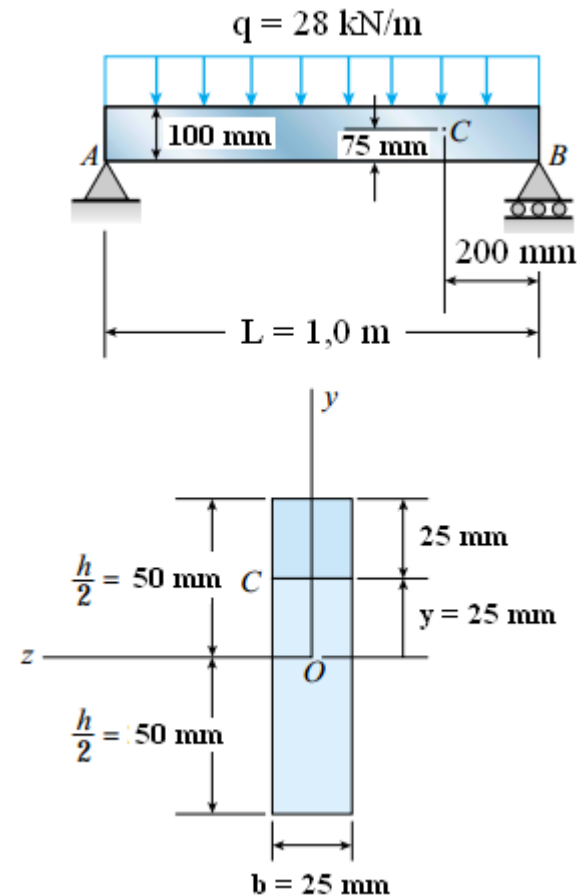
$$\tau_{maks} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{4V}{3A} \left(\frac{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{r_2^2 + r_1^2} \right)$$



Tegangan Geser pada Balok

Contoh 5

Sebuah balok metal dengan panjang $L = 1,0$ m ditumpu sederhana di titik A dan B. Beban terbagi rata pada balok (termasuk berat sendiri) adalah $q = 28$ kN/m. Penampang balok adalah persegi panjang dengan lebar $b = 25$ mm dan tinggi $h = 100$ mm. Hitung besarnya tegangan normal σ_c dan tegangan geser τ_c di titik C yang terletak 75 mm dari tepi bawah balok dan 200 mm dari tumpuan B. Gambarkan tegangan-tegangan ini pada suatu elemen tegangan di titik C



Jawab :

Gaya Geser dan Momen Lentur :

$$M_C = 2,24 \text{ kN.m} \quad V_C = 8,4 \text{ kN}$$

Momen Inersia :

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12} \times 25 \times 100^3 = 2,083 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Tegangan Normal di C :

$$\sigma_C = -\frac{My}{I} = -\frac{2,24 \times 10^6 \times 25}{2,083 \times 10^6} = -26,88 \text{ MPa}$$

Tegangan Geser di C. Untuk mendapatkan nilai tegangan geser di titik C, terlebih dahulu perlu dihitung statis momen, Q_C :

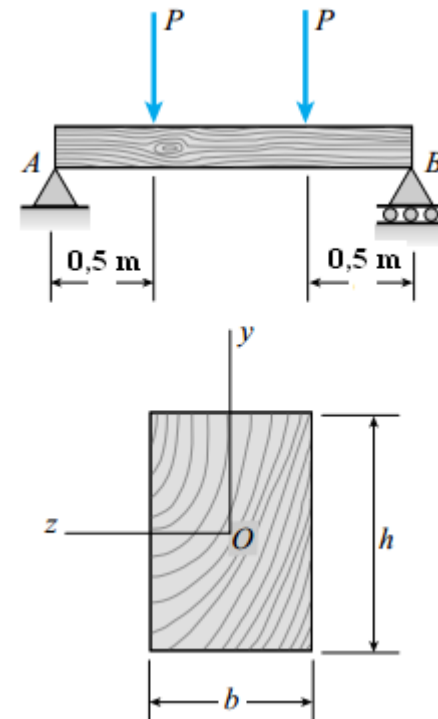
$$Q_C = ACy_C = (25 \times 25)(25 + 25/2) = 23.437,5 \text{ mm}^3$$

$$\tau_C = \frac{V_C Q_C}{Ib} = \frac{8.400 \times 23.437,5}{2,083 \times 10^6 \times 25} = 3,78 \text{ MPa}$$

Tegangan Normal pada Balok

Contoh 6

Sebuah balok kayu AB yang memikul dua beban terpusat P mempunyai penampang persegi panjang dengan lebar $b = 100$ mm dan tinggi $h = 150$ mm. Tentukan harga beban ijin maksimum P_{maks} jika tegangan ijin lentur adalah $\sigma_{\text{ijin}} = 11$ MPa (untuk tarik dan tekan) dan tegangan ijin untuk geser horizontal adalah $\tau_{\text{ijin}} = 1,2$ MPa (abaikan berat sendiri balok)



Jawab :

Gaya geser maksimum terjadi di tumpuan dan momen lentur maksimum terjadi di seluruh daerah antara kedua beban, nilainya adalah :

$$V_{maks} = P \quad M_{maks} = Pa$$

Modulus penampang dan luas penampang :

$$S = \frac{bh^2}{6} \quad A = bh$$

Tegangan normal dan tegangan geser yang terjadi :

$$\sigma_{maks} = \frac{M_{maks}}{S} = \frac{6Pa}{bh^2} \quad \tau_{maks} = \frac{3V_{maks}}{2A} = \frac{3P}{2bh}$$

Beban P maksimum untuk lentur dan geser, masing-masing adalah :

$$P_{lentur} = \frac{\sigma_{ijin} bh^2}{6a} \quad P_{geser} = \frac{2\tau_{ijin} bh}{3}$$

Dengan mensubstitusikan nilai-nilainya diperoleh

$$P_{lentur} = 8,25 \text{ kN} \quad P_{geser} = 12,0 \text{ kN}$$

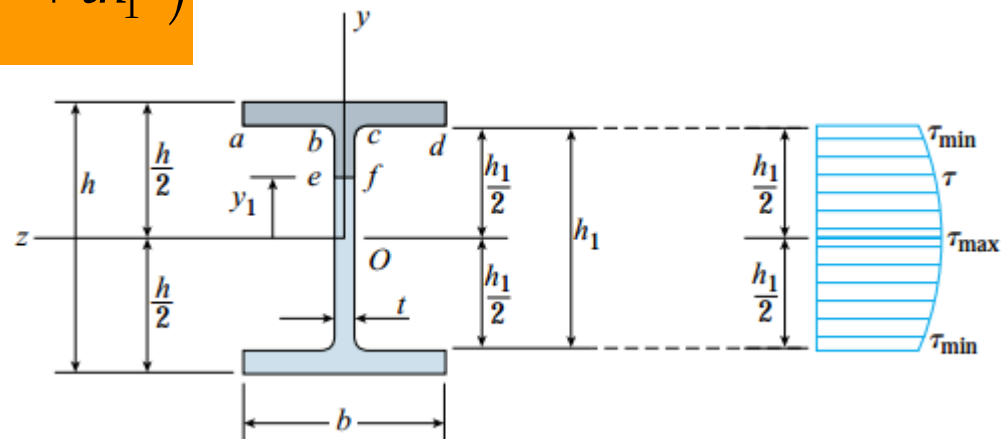
Jadi tegangan lentur menentukan desain dan beban ijin maksimum adalah 8,25 kN

Tegangan Geser pada Balok (Dengan Sayap)

- Balok dengan sayap umumnya dijumpai pada balok baja
- Tegangan geser pada badan balok dapat dihitung dengan persamaan :

$$\tau_{maks} = \frac{V}{8It} (bh^2 - bh_1^2 + th_1^2)$$

$$\tau_{min} = \frac{Vb}{8It} (h^2 - h_1^2)$$

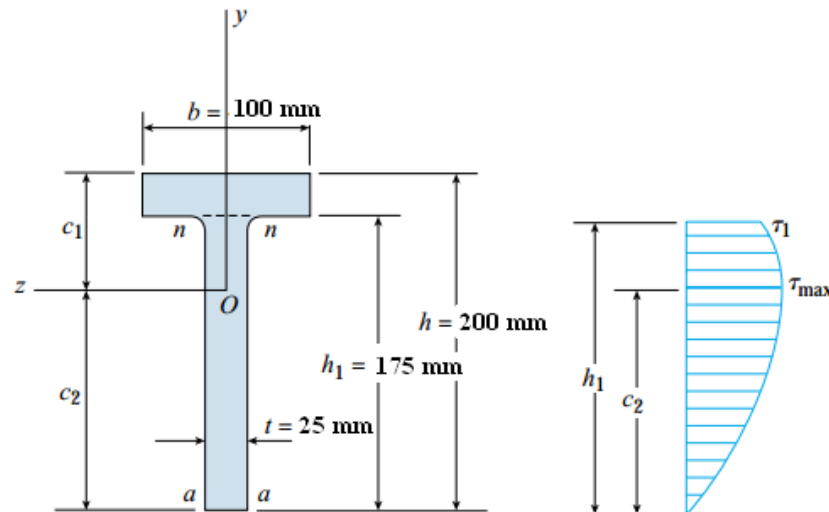


Tegangan geser maksimum terjadi pada sumbu netral, dan tegangan geser minimum terjadi pada pertemuan badan dan sayap

Tegangan Normal pada Balok

Contoh 7

Sebuah balok yang mempunyai penampang bentuk T memikul gaya geser vertikal $V = 45$ kN. Dimensi penampang adalah $b = 100$ mm, $t = 25$ mm, $h = 200$ mm dan $h_1 = 175$ mm. Tentukan tegangan geser τ_1 di bagian atas badan (garis n-n) dan tegangan geser maksimum τ_{maks} .



Jawab :

Lokasi Sumbu Netral

$$A = \sum A_i = b(h - h_1) + th_1 = 6.875 \text{ mm}^2$$

$$Q_{aa} = \sum y_i A_i = \left(\frac{h + h_1}{2} \right) (b)(h - h_1) + \frac{h_1}{2} (th_1) = 851.562,5 \text{ mm}^3$$

$$c_2 = \frac{Q_{aa}}{A} = 123,864 \text{ mm} \quad c_1 = 76,136 \text{ mm}$$

Momen Inersia

$$I_{aa} = \frac{bh^3}{3} - \frac{(b-t)h_1^3}{3} = 132.682.291,67 \text{ mm}^4 \quad Ac_2^2 = 105.478.247,16 \text{ mm}^4$$

$$I = I_{aa} - Ac_2^2 = 27.204.044,51 \text{ mm}^4$$

Tegangan Geser di Atas Badan (garis nn)

$$Q_1 = b(h - h_1) \left(c_1 - \frac{h - h_1}{2} \right) = 159.090 \text{ mm}^3$$

$$\tau_1 = \frac{VQ_1}{It} = \frac{45.000 \times 159.090}{27.204.044,51 \times 25} = 10,53 \text{ MPa}$$

Tegangan Geser Maksimum (di sumbu netral)

$$Q_{maks} = tc_2 \left(\frac{c_2}{2} \right) = 191.778,63 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{maks} = \frac{VQ_{maks}}{It} = \frac{45.000 \times 191.778,63}{27.204.044,51 \times 25} = 12,69 \text{ MPa}$$

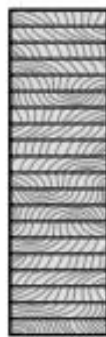
Soal 4.18 – 4.24

Balok Tersusun

- Balok tersusun terbuat dari dua atau lebih bagian bahan yang digabungkan menjadi satu balok tunggal
- Balok seperti ini dapat mempunyai berbagai bentuk guna memenuhi kebutuhan arsitektural maupun struktural



(a)



(b)



(c)

(a) wood box beam,

(b) glulam beam,

(c) plate girder

Balok Tersusun

- Untuk mendesain balok tersusun mula-mula balok didesain seolah terbuat dari satu bagian dengan memperhitungkan baik **tegangan lentur** maupun **tegangan geser**
- Selanjutnya **sambungan** antar bagian elemen harus didesain untuk menjamin bahwa balok benar-benar merupakan satu kesatuan tunggal
- Untuk mendesain sambungan yang mencukupi maka perlu diketahui besarnya aliran geser (*shear flow*) yang terjadi

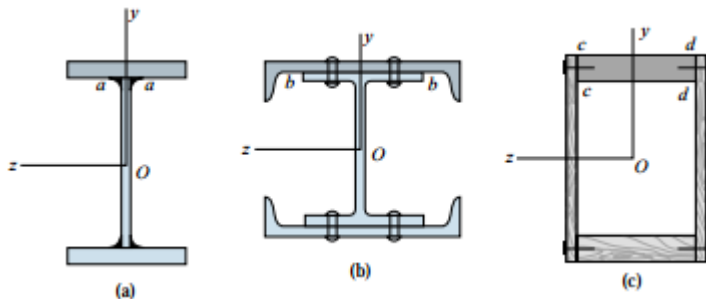
Aliran geser adalah gaya geser horizontal per satuan jarak di sepanjang sumbu longitudinal balok

Balok Tersusun

- Besarnya aliran geser yang terjadi dihitung dengan rumus :

$$f = \frac{VQ}{I}$$

- Daerah yang digunakan untuk menentukan Q, sangat ditentukan oleh bentuk penampang, berikut dicontohkan beberapa kasus untuk menentukan nilai Q

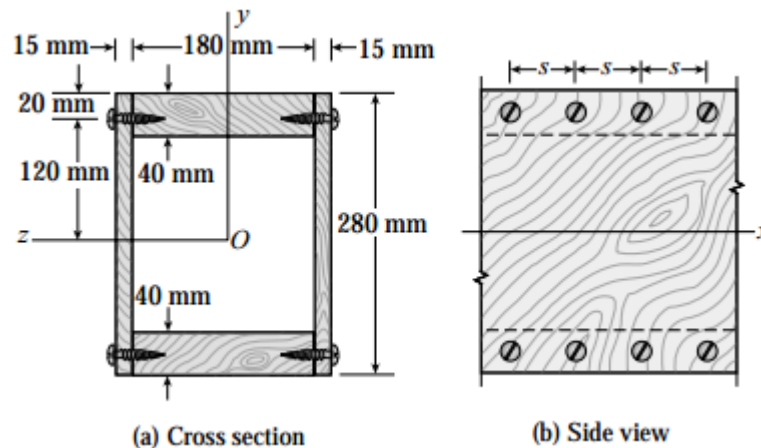


A : Q adalah momen pertama dari luas sayap
B : Q adalah momen pertama dari profil kanal
C : Q adalah momen pertama dari sayap atas

Balok Tersusun

Contoh 8

Balok boks kayu terbuat dari dua papan berukuran 40 mm x 180 mm sebagai sayap dan dua kayu lapis setebal 15 mm sebagai badan balok. Tinggi total balok adalah 280 mm. Kayu lapis ini disambung ke sayap dengan menggunakan sekrup kayu yang memiliki beban ijin geser $F = 1100$ N untuk satu sekrup. Jika gaya geser V yang bekerja di penampang sebesar 10,5 kN, tentukan jarak longitudinal ijin maksimum sekrup, s .



Jawab :

Aliran Geser

$$Q = A_f d_f = (40 \times 180)(120) = 864.000 \text{ mm}^3$$

$$I = \frac{1}{12} (210 \times 280^3) - \frac{1}{12} (180 \times 200^3) = 264,2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$f = \frac{VQ}{I} = 34,3 \text{ N/mm}$$

Jarak Sekrup. Karena jarak longitudinal sekrup adalah s , dan karena ada dua garis sekrup (satu di masing-masing sisi flens), maka kapasitas beban sekrup adalah $2F$ per jarak s di sepanjang balok. Dengan demikian, kapasitas sekrup per jarak satuan di sepanjang balok adalah $2F/s$. Dengan menyamakan $2F/s$ dengan aliran geser f , maka diperoleh nilai s yang dibutuhkan :

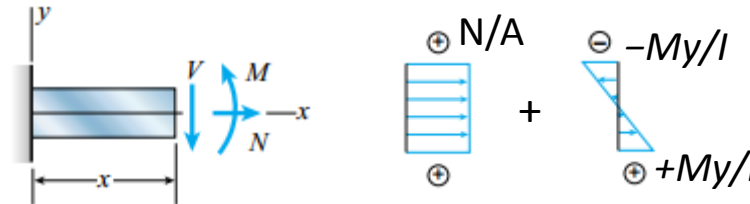
$$s = \frac{2F}{f} = 64,1 \text{ mm}$$

Harga s ini adalah jarak ijin maksimum antar sekrup, setiap jarak yang lebih besar daripada 64,1 akan menyebabkan sekrup kelebihan beban. Untuk memudahkan pelaksanaan, dan agar memenuhi keamanan, dipilih jarak $s = 60 \text{ mm}$.

Balok Dengan Beban Aksial

- Pada beberapa elemen struktural sering dijumpai aksi simultan antara momen lentur dan gaya aksial
- Besarnya tegangan normal akibat aksi momen lentur dan gaya aksial adalah :

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{My}{I}$$

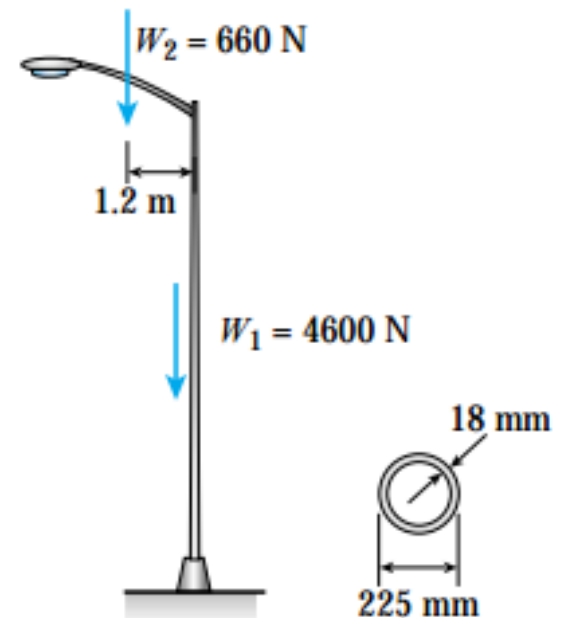


- **N** adalah positif apabila merupakan gaya tarik, dan negatif bila berupa gaya tekan
- **M**, Momen lentur positif menghasilkan tekan di bagian atas balok (y positif) dan tarik di bagian bawah balok (y negatif)

Tegangan Normal pada Balok

Contoh 9

Sebuah tiang aluminium untuk penerang jalan mempunyai berat 4600 N dan memikul lengan yang beratnya 660 N. Pusat berat lengan adalah 1,2 m dari sumbu tiang. Diameter luar tiang (di dasar) adalah 225 mm dan tebalnya adalah 18 mm. Hitunglah tegangan tarik dan tekan maksimum σ_t dan σ_c di tiang (bagian dasar) akibat semua beban mati.



Jawab :

$$P = W_1 + W_2 = 5.260 \text{ N}$$

$$M = W_2 b = 792 \text{ N.m}$$

Momen Inersia dan Luas Penampang

$$A = \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) = 11.706 \text{ mm}^2$$

$$I = \frac{\pi}{64} (d_2^4 - d_1^4) = 63,17 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$c = \frac{d_2}{2} = 112,5 \text{ mm}$$

Tegangan Maksimum

$$\sigma_t = -\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = 961 \text{ kPa}$$

$$\sigma_c = -\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = -1860 \text{ kPa}$$