**Rumus-rumus Probabilitas**

**Tujuan Pembelajaran :**

1. Memahami dan menjelaskan konsep probabilitas
2. Memahami dan mengoperasikan rumus-rumus probabilitas
3. **Probabilitas Kejadian Majemuk (A u B) DAN (A n B)**

Dengan mengingat kembali pengetahuan mengenai teori himpunan bahwa bila A dan B dua himpunan dalam himpunan semesta S, gabungan dari A dan B adalah himpunan baru yang anggotannya terdiri atas anggota A atau anggota B, atau anggota keduanya ditulis A u B = {x є A atau x є B}.

Banyaknya anggota himpunan A u B adalah

n (A u B) = n(A) + n(B) – n (A n B)

Sejalan dengan himpunan gabungan tersebut, karena ada keterkaitan antara teori himpunan dengan teori probabilitas, kita dapat merumuskan kejadian gabungan A dan B, yaitu kejadian A u B pada ruang sampel S. Bila A dan B kejadian sembarang pada ruang sampel S, gabungan kejadian A dan B yang ditulis A u B adalah kumpulan semua titik sampel yang ada pada A atau B atau pada kedua-duanya. Kejadian A u B disebut kejadian majemuk. Demikian halnya, kejadian A u B yaitu kumpulan titik sampel yang ada pada A dan B, juga disebut kejadian majemuk. Probabilitas kejadian A u B dirumuskan sebagai berikut

**Rumus 1.4**

**P(A u B) = P(A) + P(B) – P(A n B)**

Penjelasan lahirnya rumus tersebut adalah sebagai berikut

Kita telah tahu bahwa

n(A u B) = n(A) + n(B) – n(A n B)

Bila dua ruas persamaan dibagi dengan n(S), diperoleh

n(A u B) / n(S) = n(A) / n(S) + n(B) / n(S) – n(A n B) / n(S)

sehingga

P(A u B) = P(A) + P(B) – P(A n B)

**Contoh**

1. Kita ambil satu kartu secara acak dari satu set kartu bridge yang lengkap. Bila A = kejadian terpilihnya kartu AS dan B = kejadian terpilihnya kartu wajik, hitunglah P(A u B)

**Jawab**

P(A) = 4/52 P(B) = 13/52 P(A n B) = 1/52 (kartu AS dan Wajik)

Maka,

P(A u B) = P(A) + P(B) – P(A n B)

 = 4/52 + 13/52 – 1/52

 = 16/52

1. Peluang seorang mahasiswa lulus kalkulus adalah 2/3 dan peluang ia lulus bahasa inggris adalah 4/9. Bila peluang lulus sekurang-kurangnya satu mata kuliah di atas adalah 4/5, berapa peluang ia lulus kedua mata kuliah itu?

**Jawab**

Misalkan A = kejadian lulus kalkulus

 B = kejadian lulus bahasa inggris

P(A) = 2/3 P(B) = 4/9 P(A n B) = 4/5

P(A u B) = P(A) + P(B) – P(A n B)

 = 2/3 + 4/9 – 4/5

 = 14/45

Probabilitas kejadian majemuk A u B sebagaimana rumus 1.4 tersebut masih dapat dikembangkan lebih lanjut menjadi probabilitas kejadian majemuk yang terdiri dari tiga kejadian A, B, C yang ditulis dengan A u B u C. Probabilitas kejadian majemuk A u B u C dapat dirumuskan sebagai berikut :

**Rumus 1.5**

**P(A u B u C) = P(A) + P(B) + P(C) – P(A n B) – P(A n C) – P(B n C) + P(A n B n C)**

Penjelasan lahirnya rumus 1.5 tersebut dapat diperoleh dengan melakukan proses yang hampir sama dengan penjelasan lahirnya rumus 1.4.

* 1. **Dua Kejadian Saling Lepas**

Dalam menentukan probabilitas dengan aturan matematis penjumlahan dan pengurangan perlu diketahui sifat dua atau lebih peristiwa. Sifat dua atau lebih peristiwa tersebut adalah saling meniadakan (mutually exclusive) dan tidak saling meniadakan (non-mutually exclusive). Bila A dan B dua kejadian sembarang pada S dan berlaku A n B = Ø, A dan B dikatakan dua kejadian saling lepas atau saling bertentangan, atau saling terpisah (mutually exclusive). Hal ini menunjukkan bahwa peristiwa A dan peristiwa B dua kejadian saling lepas, P(A n B) = P(Ø) = 0, sehingga probabilitas kejadian A u B dirumuskan sebagai berikut

**Rumus 1.6**

**P(A u B) = P(A) + P(B)**

**Contoh**

1. Bila A dan B dua kejadian saling lepas, dengan P(A) = 0.3 dan P(B) = 0.25, tentukanlah P(A u B)

**Jawab**

Karena A dan B saling lepas, berlaku :

P(A u B) = P(A) + P(B)

 = 0.3 + 0.25 = 0.55

1. Pada pelemparan dua buah dadu, tentukanlah probabilitas munculnya muka dua dadu dengan jumlah 7 atau 11

**Jawab**

Misalkan A = kejadian munculnya jumlah 7

 B = kejadian munculnya jumlah 11

Diperoleh A = {(1.6), (2.5), (3,4), (4.3), (5.2), (6,1)}

 B = {(5,6), (6,5)}

Maka A n B = Ø, berarti A dan B saling lepas

P(A) = 6/36 P(B) = 2/36 sehingga

P(A u B) = P(A) + P(B)

 = 6/36 + 2/36

 = 8/36

Dengan demikian dapat kita kembangkan rumus probabilitas tiga kejadian A, B, C yang saling lepas, yaitu :

**Rumus 1.7**

**P(A u B u C) = P(A) + P(B) + P(C)**

Secara umum, bila A1, A2, A3, …, An adalah kejadian-kejadian yang saling lepas, berlaku rumus probabilitas sebagai berikut :

**Rumus 1.8**

**P(A1 u A2 u A3 u, …, u An) = P(A1) + P(A2) + P(A3) + … + P(An)**

 **= Σ P(A)**

* 1. **Dua Kejadian Saling Bebas**

Sifat dua atau lebih peristiwa dari suatu percobaan dapat independen dan dapat pula dependen. Dua atau lebih peristiwa dikatakan independen jika terjadinya suatu peristiwa tidak mempengaruhi terjadinya peristiwa yang lain. Sebaliknya, dua atau lebih peristiwa dikatakan bersifat dependen jika terjadinya suatu peristiwa akan mempengaruhi terjadinya peristiwa yang lain. Dapat dikatakan bahwa dua kejadian A dan B dalam ruang sampel S dikatakan saling bebas jika kejadian A tidak mempengaruhi kejadian B dan sebaliknya, kejadian B tidak mempengaruhi kejadian A (Wibisono, 2007). Jika A dan B merupakan dua kejadian saling bebas, berlaku rumus berikut

**Rumus 1.9**

**P (A n B) = P(A) . P(B)**

**Contoh :**

1. Jika diketahui dua kejadian A dan B saling bebas dengan P(A) = 0.3 dan P(B) = 0.4, berlaku

**Jawab**

P(A n B) = P(A) . P(B)

 = 0.3 . 0.4 = 0.12

1. Pada pelemparan dua buah dadu, apakah kejadian munculnya muka X ≤ 3 dadu 1 dan kejadian munculnya Y ≥ 5 dadu 2 adalah saling bebas?

**Jawab**

Misalkan A = kejadian munculnya muka X ≤ 3 dadu 1

 B = kejadian munculnya muka Y ≥ 5 dadu 2

P(A) = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)}

 = 18/36 = 1/2

P(B) = {(1,5), (1,6), (2,5), (2,6), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)}

 = 12/36 = 1/3

P(A n B) = {(1.5), (1,6), (2,5), (2,6), (3,5), (3,6)} = 6/36 = 1/6

Maka diperoleh

P(A n B) = P(A) . P(B)

 = 1/2 . 1/3 = 1/6

Sehingga nilai P(A n B) = P(A) . P(B) yang berarti kejadian A dan B adalah saling bebas

Konsep dua kejadian saling bebas di atas dapat dikembangkan untuk tiga kejadian saling bebas antara A, B dan C. Jika A, B dan C adalah tiga kejadian saling bebas, berlaku probabilitas A n B n C, yaitu

**Rumus 1.10**

**P(A n B n C) = P(A) . P(B) . P(C)**

Secara umum, bila A1, A2, A3, …, An adalah kejadian-kejadian saling bebas, berlaku

**Rumus 1.11**

**P(A1 n A2 n A3 n, …, n An) = P(A1) . P(A2) . P(A3) … P(An)**

1. Pada pelemparan 3 uang logam, tunjukkanlah bahwa munculnya muka dari 3 uang logam saling bebas

**Jawab**

Ruang sampel (S) = {(m,m,m), (m,m,b), (m,b,m), (m,b,b), (b,m,m), (b,m,b), (b,b,m), (b,b,b)} = 8

Misalkan

A = kejadian muncul muka uang logam 1

B = kejadian muncul muka uang logam 2

C = kejadian muncul muka uang logam 3

Maka diperoleh

A = {(m,m,m), (m,m,b), (m,b,m), (m,b,b)} = 4/8 = 1/2

B = {(m,m,m), (m,m,b), (b,m,m), (b,m,b)} = 4/8 = 1/2

C = {(m,m,m), (m,b,m), (b,m,m), (b,b,m)} = 4/8 = 1/2

P(A n B) = (m,m,m) = 1/8

Sehingga

P(A n B n C) = P(A) . P(B) . P(C)

 = 1.2 . 1/2 . 1/2 = 1/8

Jadi, kejadian A, B dan C adalah tiga kejadian saling bebas.

**2. Probabilitas Bersyarat (*Conditional Probability*)**

Probabilitas bersyarat menunjukkan besarnya kesempatan suatu peristiwa akan terjadi yang didahului oleh peristiwa lain yang dependen terhadap peristiwa tersebut. Dalam probabilitas, suatu kejadian A yang terjadi dengan syarat kejadian B yang terjadi terlebih dahulu atau akan terjadi, atau diketahui terjadi dikatakan kejadian A bersyarat B yang ditulis A/B. Probabilitas terjadinya kejadian A bila kejadian B telah terjadi disebut probabilitas bersyarat, yang ditulis P(A/B), yang artinya probabilitas peristiwa A akan terjadi dengan syarat peristiwa B terjadi terlebih dahulu dan dirumuskan sebagai berikut

**Rumus 1.12**

**P(A/B) = P(A n B) / P(B), P(B) > 0**

**Contoh**

1. Misalkan sebuah dadu dilemparkan, B = kejadian munculnya bilangan kuadrat murni, dan diketahui bahwa peluang munculnya bilangan ganjil = 1/9 dan peluang munculnya bilangan genap = 2/9/ Bila diketahui A = {4,5,6} telah terjadi, tentukanlah P(A / B)

**Jawab**

S = {1,2,3,4,5,6} P(ganjil) = 1/9 P(genap) = 2/9

B = {1,4}

A = {4,5,6} = 2/9 + 1/9 + 2/9 = 5/9 maka P(A) = 5/9

A n B = {4} = 2/9 maka P(A n B) = 2/9

P(B / A) = P(A n B) / P(A)

 = (2/9) / (5/9) = 2/5

1. Diberikan populasi sarjana disuatu kota yang dibagi menurut jenis kelamin dan status pekerjaan sebagai berikut

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Bekerja | Menganggur | Jumlah |
| Laki-laki | 460 | 40 | 500 |
| Wanita | 140 | 260 | 400 |
| Jumlah | 600 | 300 | 900 |

Misalnya diambil seorang dari mereka untuk ditugaskan melakukan promosi barang dikota tersebut. Bila ternyata yang terpilih adalah orang yang telah bekerja, berapakah probabilitasnya bahwa dia

1. Laki-laki
2. Wanita

**Jawab**

Misalkan A = kejadian terpilihnya sarjana yang telah bekerja

 B = kejadian bahwa dia laki-laki

 C = kejadian bahwa dia wanita

1. n (A n B) = 460, P(A n B) = 460/900

n(A) = 600, P(A) = 600/900

P(B / A) = P(A n B) / P(A) = (460/900) / (600/900) = 460/600

1. n (A n C) = 460, P(A n C) = 140/900

n(A) = 600, P(A) = 600/900

P(C / A) = P(A n C) / P(A) = (140/900) / (600/900) = 140/600

1. Misalkan kita mengambil tiga kartu, diambil tiga kali pada sekelompok kartu bridge yang lengkap. Setiap kali mengambil, kartu yang terpilih tidak dikembalikan. Ini dikatakan pengambilan kartu tanpa pengembalian. Tentukanlah probabilitas untuk memperoleh tiga kartu AS

**Jawab**

S = kumpulan semua kartu, dengan n(S) = 52

A = terpilih kartu AS pada pengambilan pertama

B/A = terpilih kartu AS pada pengambilan kedua dengan syarat pada pengambilan pertama terpilih kartu AS

C / A n B = terpilih kartu AS pada pengambilan ketiga dengan syarat pada pengambilan pertama dan kedua terpilih kartu AS

Karena pada setiap pengambilan kartu yang terpilih tidak dikembalikan, jumlah kartu terus berkurang masing-masing 1 kartu setelah pengambilan pertama, kedua dan ketiga. Kejadian terpilihnya tiga kartu AS ditunjukkan oleh kejadian A n B n C. Oleh karena itu, kita akan menentukan P(A n B n C).

n(A) = 4, n(S) = 52, P(A) = 4/52

n(B/A) = 3, n(S) = 51, P(B/A) = 3/51

n(C/ A n B) = 2, n(S) = 50 , P(C/ A n B) = 2/50

Maka P(A n B n C) = P(C/ A n B) . P(B/A) . P(A)

 = 2/50 . 3/51 . 4/52 = 1/25 . 1/17 . 1/13 = 1/5.525

**3. Probabilitas Gabungan (*Join Probability*)**

Perumusan yang digunakan untuk menentukan probabilitas terjadinya peristiwa B dengan syarat peristiwa A terjadi terlebih dahulu adalah **P(B/A) = P(A n B) / P(A)**. Perumusan probabilitas gabungan pada peristiwa yang dependen secara statistic dapat diperoleh dengan mengalikan silang perumusan probabilitas bersyarat, sehingga menjadi **P(B n A) = P(B/A) . P(A)**

P(B n A) : probabilitas akan terjadinya peristiwa A dan peristiwa B secara bersamaan

P(B/A) : probabilitas peristiwa B terjadi dengan syarat peristiwa A terjadi terlebih dahulu

P(A) : probabilitas terjadinya peristiwa A

**Contoh :**

1. Pada saat menerima barang dari penyalur, biasanya pembeli memeriksa barang-barang tersebut. Dari 100 barang yang diterima ternyata ada 10 barang yang rusak. Apabila diambil dua barang secara acak dari 100 barang yang datang, berapa probabilitas bahwa kedua barang yang diambil tersebut rusak (pengambilan dilakukan tanpa pengembalian)

**Jawab**

Misalkan A adalah peristiwa terambilnya barang yang rusak pada pengambilan pertama dan B adalah peristiwa terambilnya barang yang rusak pada pengambilan kedua

P(A) = 10/100, maka P(B/A) = 9/99

Karena pengambilan dilakukan tanpa pengembalian, probabilitas terambil keduanya rusak adalah

P(A n B) = P(B / A) . P(A) = 9/99 . 10/100 = 90/9900 = 1/110

**4. Probabilitas Kejadian Marginal (Marginal Probability) dan Teorema Bayes**

Probabilitas marginal suatu peristiwa dapat diperoleh dari probabilitas gabungan. Misalnya A1, A2 dan A3 adalah tiga kejadian saling lepas dalam ruang sampel S dan B adalah kejadian sembarang lainnya dalam S. Maka probabilitas marginal dapat dirumuskan sebagai berikut :

**Rumus 1.13**

**P(B) = P(B/A1). P(A1) + P(B/A2). P(A2) + P(B/A3). P(A3)**

Berdasarkan rumus di atas, kita dapat menentukan probabilitas kejadian bersyarat A1/B, A2/B dan A3/B dengan cara berikut

**P(A1 / B) = P(B n A1) / P(B) = P(B/A1) P(A1) / Σ P(B / Ai) P(Ai)**

Probabilitas bersyarat memperhitungkan informasi yang diperoleh dari suatu peristiwa untuk memperkirakan probabilitas peristiwa yang lain. Konsep ini dapat dikembangkan untuk merevisi probabilitas berdasarkan informasi baru dan untuk menentukan probabilitas sebagai akibat suatu pengaruh tertentu. Prosedur untuk merevisi probabilitas ini dikenal sebagai teorema Bayes. Secara umum, bila A1, A2, A3, …, An kejadian saling lepas dalam ruang sampel S dan B kejadian lain yang sembarang dalam S, probabilitas kejadian bersyarat Ai / B dirumuskan sebagai berikut :

**P(Ai / B) = P(B n Ai) / P(B) = P(B / Ai) P(Ai) / Σ i=1-n P(B / Ai) P(Ai)**

Contoh :

1. Misalkan ada tiga kotak masing-masing berisi 2 bola. Kotak 1 berisi 2 bola merah, kotak 2 berisi 1 bola merah dan 1 bola putih, dan kotak 3 berisi 2 bola putih. Dengan mata tertutup, anda diminta mengambil 1 kotak secara acak dan kemudian mengambil 1 bola secara acak dari kotak yang terambil itu. Anda diberitahu bahwa bola yang terambil ternyata berwarna merah. Berapakah peluang bola tersebut terambil dari kotak 1, kotak 2 dan kotak 3?

Jawab

Misalkan A1 = kejadian terambilnya kotak 1

 A2 = kejadian terambilnya kotak 2

 A3 = kejadian terambilnya kotak 3

 B = kejadian terambilnya bola merah

Ditanya P(A1 / B), P(A2 / B) dan P(A3 / B)

P(B / A1) = 1 P(B / A2) = 1/2 P(B / A3) = 0

n(A1) = 2/6 P(A1) = 1/3

n(A2) = 2/6 P(A1) = 1/3

n(A2) = 2/6 P(A1) = 1/3

P(B) = P(B/A1) . P(A1) + P(B/A2) . P(A2) + P(B/A3) . P(A3)

 = 1 . 1/3 + 1/2 . 1/3 + 0 . 1/3 = 1/2

Jadi

P(A1 / B) = P(B n A1) / P(B) = P(B / A1) . P(A1) / P(B) = (1 . 1/3) / (1/2) = 2/3

P(A2 / B) = P(B n A2) / P(B) = P(B / A2) . P(A2) / P(B) = (1/2 . 1/3) / (1/2) = 1/3

P(A3 / B) = P(B n A3) / P(B) = P(B / A3) . P(A3) / P(B) = (0. 1/3) / (1/2) = 0

**TUGAS 2 !**

1. Peluang suatu penerbangan regular berangkat tepat pada waktunya adalah P(D) = 0.83, peluang penerbangan itu mendarat tepat pada waktunya adalah P(A) = 0.92, dan peluang penerbangan itu berangkat dan mendarat pada waktunya adalah P(A n D) = 0.78. hitunglah peluang dalam suatu pesawat pada penerbangan itu :
2. Mendarat tepat waktu bila diketahui bahwa pesawat tersebut berangkat tepat waktu
3. Berangkat tepat waktu bila diketahui bahwa pesawat tersebut mendarat tepat waktu
4. Ada 3 kotak yang masing-masing berisi bola merah dan putih sbb :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Kotak 1 | Kotak 2 | Kotak 3 | Jumlah |
| Bola Merah | 5 | 7 | 8 | 20 |
| Bola Putih | 4 | 3 | 6 | 13 |
| Jumlah | 9 | 10 | 14 | 33 |

Mula-mula satu kotak dipilih secara acak, kemudian dari kotak yang terpilih diambil satu bola juga secara acak. Tiap kotak mempunyai kesempatan yang sama untuk terpilih.

1. Berapa peluang bahwa bola itu merah?
2. Berapa peluang bahwa bola itu putih?
3. Berapa peluang terpilihnya bola merah dari kotak 1?
4. Berapa peluang terpilihnya bola putih dari kotak 2?
5. Dua kartu diambil secara acak (satu-satu) dari sekumpulan kartu bridge yang dikocok dengan baik. Tentukanlah probabilitas untuk memperoleh 2 kartu AS jika
6. Pengambilan kartu pertama dikembalikan
7. Pengambilan kartu kedua tidak dikembalikan
8. Tiga kartu diambil secara acak dari sekelompok kartu bridge. Tentukanlah probabilitas kejadian terambilnya :
9. 2 kartu jack dan 1 kartu king
10. 3 kartu dari 1 jenis
11. 3 kartu berbeda jenis
12. Paling sedikit 2 kartu AS
13. Satu kantong berisi 5 bola putih dan 3 bola merah. Satu kantong yang lain berisi 4 bola putih dan 5 bola merah. Jika dari setiap kantong diambil sebuah bola, tentukanlah probabilitas kejadian terambilnya :
14. 2 bola putih
15. 2 bola merah
16. 1 bola putih dan 1 bola merah