**Distribusi Probabilitas Diskret**

**Tujuan Pembelajaran :**

1. Memahami dan menjelaskan distribusi teoretis, distribusi seragam, distribusi binomial dan distribusi multinomial
2. Mampu mengoperasikan dan menyelesaikan soal-soal distribusi seragam, binomial dan multinomial
3. **Pendahuluan**

Distribusi teoritis merupakan alat bagi kita untuk menentukan apa yang dapat kita harapkan apabila asumsi-asumsi yang kita buat benar. Distribusi frekuensi dapat digunakan sebagai dasar pembanding, dari suatu hasil observasi atau eksperimen, dan sering juga digunakan sebagai pengganti distribusi sebenarnya. Hal ini penting sekali karena, selain sangat mahal, distribusi sebenarnya yang harus diperoleh melalui eksperimen sering kali tidak dapat dilakukan. Distribusi teoritis memungkinkan para pembuat keputusan untuk memperoleh dasar logika yang kuat di dalam keputusan, dan sangat berguna sebagai dasar pembuatan ramalan berdasarkan informasi yang terbatas atau pertimbangan-pertimbangan teoritis dan berguna pula untuk menghitung probabilitas terjadinya suatu peristiwa.

Pengertian mengenai beberapa distribusi yang utama akan meningkatkan kemampuan seseorang untuk membaca atau mengartikan hasil karya ilmiah hampir di semua bidang ilmu pengetahuan. Setiap kejadian yang dapat dinyatakan sebagai perubahan nilai suatu variabel umumnya mengikuti distribusi teoritis tertentu dan apabila sudah ketahuan jenis distribusinya, kita dengan mudah dapat mengetahui besarnya nilai probabilitas terjadinya peristiwa tersebut. Beberapa distribusi teoritis yang akan dibahas antara lain distribusi seragam, distribusi binomial, distribusi multinomial, distribusi hipergeometrik, dan distribusi poisson yang merupakan distribusi peubah acak yang bersifat diskret. Sedangkan distribusi kontinu terdiri atas distribusi normal, distribusi student dan khi-kuadrat.

1. **Distribusi Seragam**

Distribusi seragam (*uninformly distribution*) merupakan distribusi probabilitas yang paling sederhana diantara distribusi-distribusi probabilitas yang lain. Dalam distribusi ini setiap nilai peubah acak mempunyai probabilitas terjadi yang sama. Distribusi seragam dapat pula didefinisikan seperti berikut. Bila peubah acak X mempunyai nilai-nilai X1, X2, …Xk, dengan probabilitas yang sama, distribusi seragam diskret dinyatakan sebagai

**Rumus 1.1**

**P(x : k) = 1/k untuk x = x1, x2, …, xk**

Kita menggunakan notasi p(x, k), alih-alih p(x) untuk menunjukkan bahwa distribusi seragam bergantung pada parameter k.

**Contoh :**

1. Sebuah dadu setimbang dilemparkan sekali. Bila x menyatakan mata dadu yang muncul, buatlah distribusi probabilitas x!

**Jawab**

Ruang contoh S = {1,2,3,4,5,6} dan setiap mata dadu mempunyai probabilitas yang sama untuk muncul, yaitu 1/6. Dengan demikian distribusi seragamnya adalah

p(x : 6) = 1/6 untuk x = 1,2,3,4,5,6

1. Tim bulu tangkis terdiri atas 8 orang. Bila dari tim tersebut dipilih 2 orang secara acak untuk melakukan pertandingan, tentukan distribusi seragam yang diambil secara acak!

**Jawab**

Jumlah dalam satu tim 8 orang, maka kita mengambil 2 orang secara acak dalam (8 2) = 28 orang. Bila cara masing-masing diberi nomor 1 sampai 28, distribusi probabilitasnya adalah

p(x : 28) = 1/28 untuk x = 1, 2,…, 28

1. **Distribusi Binomial**

Beberapa percobaan sering kali terdiri atas ulangan-ulangan yang mempunyai dua kejadian, yaitu berhasil atau gagal. Percobaan ini merupakan percobaan dengan pemulihan (*with replacement*), yaitu setiap cuplikan yang telah diamati dimasukkan kembali dalam populasi semula. Populasi setelah pencuplikan tetap sama, artinya susunan anggota populasi dan nisbah setelah pencuplikan tidak pernah berubah. Seorang petugas pengendali mutu ingin menghitung probabilitas untuk mendapatkan 4 bola lampu yang rusak dari suatu sampel acak sebanyak 20 bola lampu apabila diketahui bahwa 10% dari bola lampu tersebut rusak. Nilai probabilitas ini dapat diperoleh dari tabel binomial yang dibuat berdasarkan distribusi binomial (Supranto, 2006).

Percobaan-percobaan pada distribusi binomial bersifat bebas dan probabilitas keberhasilan setiap ulangan tetap sama. Distribusi binomial merupakan suatu distribusi probabilitas peubah acak yang bersifat diskret. Distribusi ini sering disebut proses Bernoulli (*Bernoulli Trials*). Nama ini diambil dari seorang ahli matematika berkebangsaan Swiss, yaitu James Bernoulli (1654 – 1705). Pada umumnya, suatu eksperimen atau percobaan dapat dikatakan eksperimen atau percobaan binomial apabila mempunyai beberapa syarat berikut :

1. Setiap percobaan selalu dibedakan menjadi dua macam kejadian yang bersifat saling meniadakan (*mutually exclusive*)
2. Dalam setiap percobaan hasilnya dapat dibedakan, yaitu berhasil atau gagal
3. Probabilitas kejadian berhasil dinyatakan dengan huruf p, sedangkan probabilitas gagal dinyatakan dengan huruf q, dimana p + q = 1 atau q = 1 – p
4. Masing-masing percobaan merupakan peristiwa yang bersifat bebas, yaitu peristiwa yang satu tidak dapat mempengaruhi peristiwa yang lain

Misalnya, keluarga Markus merencanakan memiliki 3 anak seperti yang terlihat pada tabel 1.1. Disini setiap kelahiran anak laki-laki dikatakan “berhasil” dan setiap kelahiran anak perempuan dikatakan “gagal”. Dengan demikian, banyaknya anak laki-laki dipandang sebagai sebuah peubah acak x yang mengambil bilangan 0 sampai 3. Peubah acak x yang merupakan banyaknya keberhasilan dalam setiap percobaan disebut *peubah acak binomial.*

Tabel 1.1 hasil “percobaan” keluarga Markus

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ruang contoh | Peubah X | Probabilitas |
| PPP | 0 | 1/8 |
| LPP | 1 | **1/8** |
| PLP | 1 | **1/8 = 3/8** |
| PPL | 1 | **1/8** |
| LLP | 2 | **1/8** |
| LPL | 2 | **1/8 = 3/8** |
| PLL | 2 | **1/8** |
| LLL | 3 | 1/8 |

Selanjutnya, ilustrasi keluarga Markus di atas akan kita generalisasi dengan mencari rumusan yang lebih umum dari distribusi binomial. Bila kelahiran anak laki-laki dinyatakan sebagai x, probabilitas kelahiran anak laki-laki mempunyai nilai yang tetap, yaitu ½. Probabilitas kelahiran anak laki-laki yang dipandang berhasil adalah x dengan probabilitas p dan sebaliknya, setiap kegagalan yaitu kelahiran anak perempuan, adalah (n – x) dengan probabilitas q = 1 – p. Dengan demikian, probabilitas untuk urutan tertentu dinyatakan dengan px . qn-x

Sekarang tinggal menghitung banyaknya kombinasi yang mempunyai keberhasilan x dan kegagalan (n – x). Bilangan ini tidak lain adalah bentuk kombinasi. Selanjutnya, banyaknya kombinasi ini dikalikan dengan px . qn-x untuk mendapatkan rumus distribusi binomial. Dengan kata lain, jika suatu percobaan binomial mempunyai probabilitas keberhasilan p dan probabilitas kegagalan q, distribusi probabilitas peubah acak x adalah banyaknya keberhasilan dalam n percobaan yang bebas dan dinyatakan oleh

**Rumus 1.2**

**b(x : n : p) = (n x) px . qn-x dengan x = 0, 1, 2, … n**

Tabel 1.2 Koefisien probabilitas distribusi binomial

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Peubah X | Koefisien Distribusi binomial | Polinomial |
| 0 | 1 | (p+q) 0 |
| 1 | p + q | (p+q) 1 |
| 2 | p2 + 2pq + q2 | (p+q) 2 |
| 3 | p3 + 3p2q1 + 3p1q2 + q3 | (p+q) 3 |
| 4 | p4 + 4p3q1 + 6p2q2 + 4p1q3 + q4 | (p+q) 4 |
| 5 | p5 + 5p4q1 + 10p3q2 + 10p2q3 + 5p1q4 + q5 | (p+q) 5 |
| … | ………………………………………………………………... | ……… |
| n | pn + npn-1q1 + ….+ np1qn-1+ qn | (p+q) n |

Misalnya, besarnya probabilitas keluarga Markus dengan 2 anak laki-laki dari 3 anak yang dimiliki adalah

b(2 : 3 : ½) = (3 2) (1/2)2 (1-1/2) 3-2 = 3! / 2! (3-2)! (1/2)2(1/2)1 = 3/8

Perumusan 1.2 dapat dirangkum dalam bentuk tabel probabilitas binomial bagi peubah acak x yang memuat kombinasi yang mungkin terjadi.

Nilai rata-rata dan varian distribusi binomial pada dasarnya ditentukan oleh berbagai macam peristiwa yang dihasilkan dari percobaan binomial, terutama probabilitas keberhasilan atau kegagalannya. Misalkan hasil percobaan ke n dinyatakan peubah acak Ln dengan probabilitas p keberhasilan Ln = 1 dan probabilitas q kegagalan Ln = 0. Suatu percobaan binomial banyaknya keberhasilan dituliskan sebagai jumlah n peubah acak bebas :

x = L1 + L2 + … + Ln

Nilai harapan setiap Ln adalah E(Ln) = 1 (p) + 0 (q) = p sehingga rata-rata suatu populasi distribusi binomial dapat dinyatakan sebagai perkalian n percobaan dengan probabilitas percobaan.

**Rumus 1.3**

**µ = E(x) = E(L1) + E(L2) + … + E(Ln)**

**= p + p + … + p = n.p**

Sementara besarnya ragam distribusi binomial dapat dicari dari hubungan berikut. Ragam populasi untuk setiap Li adalah

**δ2 Li = E [(Li – p)2] = E(Li2) – p2**

 **= (1)2p + (0)2 q – p2 = p.q**

Dengan demikian, total ragam populasi distribusi binomial dirumuskan sebagai berikut :

**Rumus 1.4**

**δ2 = δ2 L1 + δ2 L2 + … + δ2 Ln = p.q + p.q + … = npq**

dan simpangan bakunya adalah

**Rumus 1.5**

**δ = √n p q**

**Contoh :**

1. Keluarga Markus berencana memiliki 3 anak. Bila X menyatakan banyaknya kelahiran anak laki-laki, hitunglah
2. Probabilitas kelahiran 2 anak laki-laki
3. Probabilitas memiliki tidak lebih dari 2 anak laki-laki
4. Rata-rata dan simpangan baku peubah acak X

**Jawab**

Probabilitas kelahiran anak laki-laki sama dengan anak perempuan, p,q = ½ dan n = 3

1. Probabilitas lahir 2 anak laki-laki

p(x = 2) = b(x : n : p) = (n x) px . qn-x

= b(2 : 3 : ½) = (3 2) (1/2)2 . (1/2) 3-2

= 3! / 2! (3 – 2)! . (½) 2+1

 = 3! / 2! 1! . (1/2) 3

 = 3 . (½)3

 = 3 . 0.125 = 0.375

1. Tidak lebih dari 2 anak laki-laki

p(x ≤ 2) dimana x = 0, 1 dan 2

b (0 : 3 : ½) = (3 0) (1/2)0 . (1/2) 3-0

 = 3! / 0! (3 – 0)! . (½) 0+3

 = 3! / 3! . (1/2) 3

 = 0.125

b (1 : 3 : ½) = (3 1) (1/2)1 . (1/2) 3-1

 = 3! / 1! (3 – 1)! . (½) 1+2

 = 3! / 1! 2! . (1/2) 3

 = 0.375

b (2 : 3 : ½) = (3 2) (1/2)2 . (1/2) 3-2

= 3! / 2! (3 – 2)! . (½) 2+1

 = 3! / 2! 1! . (1/2) 3

 = 3 . (½)3

 = 3 . 0.125 = 0.375

Sehingga p (x ≤ 2) = 0.125 + 0.375 + 0.375

 = 0.875

Dapat juga diselesaikan dengan bantuan tabel distribusi binomial

p(x ≤ 2) = Σ n= 0..2 b (x : 3 : 0.5)

 = b (0 : 3 : ½) + b (1 : 3 : ½) + b (2: 3 : ½)

 = 0.1250 + 0.375 + 0.375

 = 0.875

1. Rata-rata, ragam dan simpangan baku kelahiran anak laki-laki

Rata-rata, µ = n . p = 3 . ½ = 1.5, dengan n = 3 dan p = ½

Simpangan baku, δ = √ n . p . q = √ 3 . ½. ½ = 0.866

Jadi, dalam kelahiran 3 anak, rata-rata anak laki-laki yang dilahirkan adalah 1.5 dengan simpangan baku sebesar 0.866

1. Menurut penelitian, probabilitas seseorang untuk sembuh dari penyakit antraks dengan pemberian obat tertentu adalah sebesar 60%. Jika diambil 10 orang yang terjangkit secara acak, hitunglah :
2. Probabilitas tidak lebih dari 3 orang sembuh
3. Sedikitnya 5 orang sembuh
4. Rata-rata dan simpangan baku pasien sembuh

**Jawab**

n = 10, p = 60% = 0.6, q = 1 – p = 40% = 0.4

1. Tidak lebih dari 3 orang dapat sembuh

p(x ≤ 3) = Σ n= 0..3 b (x : 10 : 0.6)

 = b (0 : 10 : 0.6) + b (1 : 10 : 0.6) + b (2 : 10 : 0.6) + b (3 : 10 : 0.6)

 = 0.0001 + 0.0016 + 0.0106 + 0.0425

 = 0.548

1. Sedikitnya 5 orang dapat sembuh

p(x ≥ 5) = 1 – (Σ n= 0..3 b (x : 10 : 0.6) + b (4 : 10 : 0.6))

 = 1 – (0.548 + 0.1114)

 = 0.3406

1. Rata-rata, ragam dan simpangan baku pasien dapat sembuh

Rata-rata µ = 10 (0.6) = 6

Simpangan baku, δ = √ 10. 0.6 . 0.4 = 1.55

1. **Distribusi Multinomial**

Bila suatu percobaan binomial terhadap ulangannya menghasilkan lebih dari dua kemungkinan berhasil, “nyaris berhasil” atau gagal, percobaan itu menjadi percobaan multinomial. Dengan kata lain, bila pada distribusi binomial hasil sebuah percobaan hanya dikategorikan dua macam, yaitu berhasil atau gagal, dalam distribusi multinomial sebuah percobaan akan menghasilkan beberapa kejadian (lebih dari dua) yang saling meniadakan atau saling lepas (*mutually exclusive*).

Sebagai contoh, keadaan cuaca dapat digolongkan menjadi cerah, hujan, atau mendung. Pilihan kendaraan untuk ke kantor adalah mobil sendiri, bus, kereta api, angkot bahkan ojek. Seluruhnya merupakan ulangan-ulangan yang menghasilkan lebih dari dua kemungkinan. Secara umum, bila setiap ulangan dapat menghasilkan satu diantara k kemungkinan hasil percobaan E1, E2, …, Ek kali kejadian dalam n ulangan yang bebas dengan x1 + x2 + … + xk = n. sedangkan banyaknya sekatan n elemen ke dalam k kelompok dengan x1 dalam kelompok pertama, x2 dalam kelompok kedua, … dan xk dalam kelompok ke k merupakan suatu permutasi dari n elemen yang seluruhnya tidak dapat dibedakan. Dengan demikian, probabilitas distribusi multinomial dapat dirumuskan secara matematik dengan persamaan berikut

**Rumus 1.6**

**b(x1, x2, …xn : n : p1, p2, …, pk) = (n x1, x2, …xk) p1x1 p2x2 … pkxt**

dengan probabilitas suku-suku pengurai multinomial p1 + p2 + … + pk = 1

**Contoh :**

1. Dalam pemilu legislatif, para konstituen mempunyai pilihan mencoblos 3 partai politik dengan probabilitas pilihan : PAN 0.5, Partai Demokrat 0.3, GOLKAR 0.2. berapa probabilitas bahwa di antara 10 konstituen sebanyak 4 konstituen memilih PAN, 3 konstituen memilih PD dan 3 konstituen memilih GOLKAR

**Jawab**

Kita daftar kejadian yang mungkin

E1 = 4 konstituen memilih PAN

E2 = 3 konstituen memilih PD

E3 = 3 konstituen memilih GOLKAR

Setiap ulangan dengan probabilitas masing-masing, p1 = 0.5, p2 = 0.3 dan p3 = 0.2 oleh karena x1=4, x2=3 dan x3=3, distribusi multinomial adalah

b(4, 3, 3 : 10 : 0.5, 0.3, 0.2) = (10 4,3,3) (0.5)4 (0.3)3 (0,2)2

 = 10! / 4! 3! 3! (0.0625) (0.027) (0.008)

 = 0.057